CHARAKTERISIERUNG VON SIMPLEXEN DURCH FORTSETZUNGS- UND LIFTUNGSEIGENSCHAFTEN

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Ehrhard Behrends

aus Dahme

1970

CHARAKTERISIERUNG VON SIMPLEXEN DURCH FORTSETZUNGS- UND LIFTUNGSEIGENSCHAFTEN

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Ehrhard Behrends

aus Dahme

Erster Gutachter: Priv. Doz. Dr. Gerd Wittstock

Zweiter Gutachter: Professor Dr. Pachale

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Juni 1970

Tag der Promotion: 14. JULI 1970

Herrn Privatdozent Dr. Gerd Wittstock möchte ich herzlich

für seine zahlreichen Anregungen zu dieser Arbeit danken

E h r h a r d B e h r e n d s

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG 4

I. GEORDNETE VEKTORRÄUME 8

II. KONVEXE MENGEN 17

III. DUALITÄT DER KATEGORIEN V-ARCH UND KOMPKONV 25

IV. CHARAKTERISIERUNG VON SIMPLEXEN UND SIMPLIZIALEN RÄUMEN DURCH FORTSETZUNGS- UND LIFTUNGSEIGENSCHAFTEN 29

ANHANG: DEFINITIONEN UND BEZEICHNUNGEN 48

LITERATUR 50

EINLEITUNG

In der vorliegenden Dissertation werden (kompakte) Choquet-Simplexe und simpliziale Räume durch Fortsetzungs- und Liftungseigenschaften sowie durch Eigenschaften verschiedener Tensorprodukte charakterisiert.

Der Simplexbegriff - der eine Verallgemeinerung der üblichen Definition im endlichdimensionalen Raum darstellt - wurde implizit von CLARKSON [12] eingeführt. Eine Zusammenfassung der wichtigsten bisher bekannten Kriterien für Simplexe findet man in BAUER [3] und PHELPS [23]. Die zahlreichen in letzter Zeit erschienenen Veröffentlichungen über Simplexe behandeln Sätze, die sich im wesentlichen auf darstellende Maße und Beziehungen zwischen den Seiten oder zwischen den affinen und konvexen, stetigen Funktionen beziehen. Es lag daher nahe, Simplexe durch kategorielle Eigenschaften, d. h. von einzelnen Elementen unabhängige Eigenschaften, zu charakterisieren. Bei der Behandlung dieses Problems sind zwei Erkenntnisse von großer Bedeutung. Zum einen ist es möglich, Eigenschaften kompakter, konvexer Mengen in der Kategorie der vollständigen archimedischen Vektorräume zu untersuchen (dem "Simplex" entspricht unter dieser Dualität der "simpliziale Raum"), zum anderen lassen sich in naheliegender Weise Tensorprodukte für geordnete Vektorräume und für kompakte, konvexe Mengen definieren, die sich für die Untersuchung von Simplexeigenschaften als sehr nützlich erweisen.

Sind U und V archimedische Vektorräume mit Einheit e bzw. e', so ordnen wir den linearen Tensorraum $U \otimes V$ durch die Kegel

$$P_p := \{ \sum u_i \otimes v_i \mid u_i \geq 0,\ v_i \geq 0 \}$$

und $$P_\varepsilon := \{ \sum u_i \otimes v_i \mid \sum \xi(u_i)\eta(v_i) \geq 0 \text{ für alle positiven Funktionale } \xi \text{ und } \eta \}$$

und bezeichnen die durch P_p^- (Abschluß in der P_p-Norm) bzw. P_ε geordneten archimedischen Vektorräume (mit dem Element $e \otimes e'$ als Ordnungseinheit) mit $U \otimes_p V$ bzw. $U \otimes_\varepsilon V$.

Sind K und L kompakte, konvexe Mengen und $\mathcal{A}K$ bzw. $\mathcal{A}L$ die Räume der reellwertigen, stetigen, affinen Funktionen auf diesen Mengen, so setzen wir $K \otimes_\iota L := \mathcal{K}(\mathcal{A}K \otimes_p \mathcal{A}L)$, $K \otimes_\tau L := \mathcal{K}(\mathcal{A}K \otimes_\varepsilon \mathcal{A}L)$. Dabei bedeutet $\mathcal{K}A$ die Menge der positiven, normalisierten Funktionale auf Á (A archimedischer Vektorraum mit Einheit), versehen mit der schwachen Topologie. Daneben betrachten wir das von SEMADENI [26] eingeführte projektive Tensorprodukt $K \otimes_\pi L$ von K und L, das durch die üblichen universellen Eigenschaften (eindeutige affin-stetige Faktorisierung von biaffinen, stetigen Funktionen) eines Tensorproduktes bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Bei der Formulierung von Simplexkriterien sind gewisse Morphismen in der Kategorie der kompakten, konvexen Mengen von Bedeutung. Eine surjektive, affine, stetige Abbildung werden wir als affine Quotientenabbildung (AQ) bezeichnen. Eine injektive, affine, stetige Abbildung $i: L \longrightarrow M$ zwischen kompakten, konvexen Mengen heißt affine Einbettung (AE), wenn für alle f ($f \in \mathcal{A}L$, $f(1) > 0$ für jedes $1 \in L$) ein positives $F \in \mathcal{A}M$ mit $f = F \circ i$ existiert. i heißt Schnitt, wenn gilt:

$F(m) \leq kf(\varphi(m))$.

$\varphi: M \to L$	k	f	F	m
(Mengen-	$k \geq 0$	$f \in \mathcal{A}L$	$F \in \mathcal{A}M$	$m \in M$
abbildung)	$k \in \mathbb{R}$	$f \geq \underline{0}$	$F \geq \underline{0}$	

Wir erhalten das folgende Resultat:

Ist K eine kompakte, konvexe Menge, so sind (neben anderen, daraus leicht herzuleitenden Aussagen) folgende Aussagen äquivalent:

1) K ist ein Simplex
2) Für jedes kompakte, konvexe L ist $K \otimes_\varepsilon L = K \otimes_\iota L$
3) Für jedes kompakte, konvexe L ist $K \otimes_\pi L = K \otimes_\iota L$
4) Ist $f: L \longrightarrow M$ eine AQ, so ist auch $\mathrm{id}\, K \otimes_\iota f$ eine AQ
5) Ist $i: L \longrightarrow M$ ein Schnitt, so ist $\mathrm{id}\, K \otimes_\pi i$ eine AE
6) Ist $f: L \longrightarrow M$ eine AQ und $\psi: \mathcal{A}K \times \mathcal{A}M \longrightarrow \mathbb{R}$ ein bilineares, positives, normalisiertes Funktional, so ist ψ bilinear, positiv und normalisiert über $\mathrm{id}\mathcal{A}K \times \mathcal{A}f$ auf $\mathcal{A}K \times \mathcal{A}L$ fortsetzbar
7) Ist $i: L \longrightarrow M$ ein Schnitt und $\psi: K \times L \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, biaffine, strikt positive Abbildung, so ist ψ stetig, biaffin und positiv über $\mathrm{id}\, K \times i$ auf $K \times M$ fortsetzbar
8) Ist $f: L \longrightarrow M$ eine AQ und $u: \mathcal{A}M \longrightarrow (\mathcal{A}K)^*$ eine positive, lineare Abbildung, so ist u positiv und linear über $\mathcal{A}f$ auf $\mathcal{A}L$ fortsetzbar
9) Ist $i: L \longrightarrow M$ ein Schnitt und $g: L \longrightarrow \mathcal{A}K$ eine stetige, affine Abbildung, die alle Elemente aus L auf strikt positive Funktionen abbildet, so läßt sich g auf M derartig fortsetzen, daß die Fortsetzung affin

und stetig ist und alle Elemente aus M auf positive Funktionen abbildet

(Nachdem die vorliegende Arbeit zum größten Teil fertiggestellt war, erschien eine Arbeit von NAMIOKA-PHELPS [20], in der die Äquivalenz von 1 und 2 bewiesen wird.)

In den ersten beiden Kapiteln werden die zur Formulierung und zum Beweis der Ergebnisse wichtigen Definitionen und Hilfssätze zusammengestellt. Im Kapitel I werden unter anderem Kegel mit kompakter Basis und Darstellungen für die Norm eines Elementes in einem archimedischen Vektorraum untersucht. Kapitel II enthält Hilfssätze über Hüllenoperatoren kompakter, konvexer Mengen und deren Beziehungen zu den Extremalpunkten dieser Mengen.In Kapitel III wird die Dualität der Kategorien V-Arch und Kompkonv bewiesen, und zwar mit Hilfe elementarer funktionalanalytischer Sätze. In Kapitel IV schließlich werden neben einigen anderen die oben angegebenen Äquivalenzen formuliert und bewiesen. Es wird gezeigt, daß die Gleichheit der Tensorprodukte $K\otimes_{\pi}\cdot$ und $K\otimes_{\tau}\cdot$ nicht zur Charakterisierung von Simplexeigenschaften herangezogen werden kann.
Abschließend werden zwei archimedische Vektorräume angegeben, für die die Tensorprodukte $\otimes_{p}$ und $\otimes_{\varepsilon}$ verschieden sind. Dabei handelt es sich um einfache endlichdimensionale Räume, deren Kegel eine kompakte Basis haben.
Im Anhang sind die in der Arbeit verwendeten Symbole und Definitionen zusammengestellt.

I. GEORDNETE VEKTORRÄUME

Im folgenden sind die für die vorliegende Arbeit wichtigen Definitionen und einige Hilfssätze aus der Theorie der geordneten Vektorräume zusammengestellt. Eine Einführung in diese Theorie findet man in BIRKHOFF [8], SCHÄFER [25] oder PERESSINI [22], Kegel mit Basis werden in EDWARDS [14] näher untersucht. Die hier und in Kapitel II benutzten elementaren Begriffe der Kategorientheorie (Kategorie, Funktor, Isomorphismus usw.) sind in MITCHELL [19] zusammengefaßt.

Sei A ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge $A^+ \subset A$ heiße positiver Kegel von A, wenn gilt:

(i) A^+ ist konvex, d. h. für $a,b \in A^+$ und $\lambda \in [0,1]$ ist stets $\lambda a+(1-\lambda)b \in A^+$

(ii) Für $\mu > 0$ ist $\mu A^+ \subset A^+$

(iii) $A^+ \neq \emptyset$, $A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$

(Dabei bedeuten hier und im folgenden μC und $C + D$ die durch Komplex-Multiplikation bzw. Komplex-Addition entstehenden Mengen; $C,D \subset A$)

Das geordnete Paar (A,A^+) heißt geordneter Vektorraum. Aus den oben angegebenen Bedingungen an A^+ ergibt sich, daß durch $a \leq b \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} b - a \in A^+$ eine Ordnungsrelation auf A eingeführt werden kann (für "$a \leq c$ und $b \leq c$" schreiben wir auch "$a,b \leq c$"). Wir werden stets voraussetzen, daß der Ordnungskegel A^+ erzeugend ist, d. h. daß $A = A^+ - A^+$ gilt.

Sind (A,A^+) und (B,B^+) geordnete Vektorräume, so heißt eine

lineare Abbildung $u:A \longrightarrow B$ positiv, wenn $u(A^+) \subset B^+$ gilt. Ist zusätzlich u injektiv und gilt $u(A^+) = B^+ \cap u(A)$, so heißt u Ordnungseinbettung (OE). Ist u surjektiv und gilt $u(A^+) = B^+$, so wird u Ordnungsquotientenabbildung (OQ) genannt. Ordvekt sei die Kategorie aller geordneten Vektorräume und aller positiven linearen Abbildungen.

1.1 Lemma: Ein Morphismus $u:A \longrightarrow B$ in Ordvekt ist genau dann Isomorphismus, wenn er OQ und OE ist.

Beweis: trivial

Die Menge aller reellwertigen, linearen Abbildungen auf (A,A^+) wird mit der Menge aller positiven Abbildungen als positivem Kegel (der in allen im folgenden auftretenden Fällen erzeugend sein wird) zu einem geordneten Vektorraum. Die transponierte Abbildung eines Morphismus in Ordvekt ist dann offensichtlich wieder Morphismus. Das gilt auch dann, wenn die auftretenden Räume Topologien tragen und man nur stetige Abbildungen zuläßt.

Sei nun A ein separierter lokalkonvexer Vektorraum und K eine kompakte, konvexe Teilmenge von A, die O nicht enthält und A erzeugt. K induziert einen Ordnungskegel A_K^+ von A, der durch

$$A_K^+ := \bigcup_{0 \leq \lambda} \lambda K \qquad \text{definiert ist.}$$

1.2 Lemma: (i) A_K^+ ist abgeschlossen in der Ausgangstopologie von A

(ii) A_K^+ ist ein Kegel mit kompakter Basis, d. h. es existiert eine abgeschlossene Hyperebene H in A $(O \notin H)$, die eine kompakte, konvexe

Menge K' mit $A_K^+ = A_{K'}^+$ enthält

Beweis: Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein stetiges, lineares Funktional ξ auf A mit $\inf \xi(K) > 1$, d. h. die abgeschlossene Hyperebene $H := \xi^{-1}(1)$ $(0 \notin H)$ trennt die Mengen K und $\{0\}$. Sei K' der Schnitt dieser Hyperebene mit der konvexen Hülle von K und $\{0\}$ (zur Definition siehe Kapitel II). Damit ist (ii) bewiesen, denn die Gültigkeit der Gleichung $A_K^+ = A_{K'}^+$ ist leicht nachzurechnen, und K' ist offensichtlich kompakt und konvex (vgl. Kapitel II, 2.2 Lemma). Sei nun $a \notin A_K^+$, $r := \xi(a) + 1$. Ist $r \geq 0$, so definieren wir $U_r := \{ b \mid \xi(b) < r \} \in \mathfrak{U}(a)$. Da die konvexe Hülle von rK' und $\{0\}$ kompakt ist (siehe wieder 2.2 Lemma) und a nicht enthält, existiert eine a-Umgebung U, welche diese konvexe Hülle nicht trifft. Offensichtlich sind dann $U_r \cap U$ $(\in \mathfrak{U}(a))$ und A_K^+ disjunkt. Für $r < 0$ sind schon $\{b \mid \xi(b) < r\}$ und A_K^+ disjunkte Teilmengen von A.

Hat ein geordneter Vektorraum (A, A^+) die Eigenschaft, daß zu je zwei Elementen $a, b \in A$ die größte untere Schranke $\inf(a,b)$ und die kleinste obere Schranke $\sup(a,b)$ existieren, so heißt (A, A^+) ein Vektorverband. (A, A^+) ist bereits dann ein Vektorverband, wenn $\sup(a,b)$ für $a, b \in A^+$ stets existiert (vergleiche SCHÄFER [25], S. 209). Ein geordneter Vektorraum heißt simplizial, wenn zu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ mit $a_i \leq b_j$ $(i,j \in \{1,2\})$ ein $c \in A$ mit $a_i \leq c \leq b_j$ $(i,j \in \{1,2\})$ existiert (man sagt dann auch, daß A die Rieszsche Trennungseigenschaft hat). Offensichtlich hat ein Raum die Trennungseigenschaft genau dann, wenn er sie für positive Elemente hat.

Ist (A,A^+) ein geordneter Vektorraum, so heißt A archimedisch geordnet, wenn aus $a,b \in A$, $b \geq 0$ und $\lambda a \leq b$ für alle $\lambda \geq 0$ stets $a \leq 0$ folgt. Ein Beispiel für einen archimedisch geordneten Raum ist ein geordneter Vektorraum, dessen positiver Kegel durch eine kompakte, konvexe Menge erzeugt wird. Nach 1.2 Lemma ist dieser Kegel nämlich abgeschlossen, insbesondere ist also der Durchschnitt dieses Kegels mit jeder Geraden abgeschlossen. Daraus folgt unmittelbar, daß die Ordnung archimedisch ist.

Ein Element $e \in A^+$ ($(A,A^+) \in$ Ordvekt) heißt Ordnungseinheit, wenn für alle $a \in A$ ein $\lambda \geq 0$ existiert, so daß $a \leq \lambda e$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn die Menge $A^+ - e$ den Raum A absorbiert. Ein Tripel (A,A^+,e) ist ein archimedischer Vektorraum, wenn (A,A^+) ein archimedisch geordneter Raum ist und e Ordnungseinheit in (A,A^+) ist (man beachte den Unterschied zwischen einem archimedisch geordneten und einem archimedischen Vektorraum). Zulässige Abbildungen zwischen zwei archimedischen Vektorräumen sind die Morphismen in Ordvekt, welche die Ordnungseinheiten ineinander überführen (positive normalisierte Abbildungen). Arch ist die Kategorie aller archimedischen Vektorräume und aller positiven normalisierten Abbildungen. Normalisierte Ordnungseinbettungen (nOE) werden in Analogie zur Definition in Ordvekt erklärt. Arch-Morphismen in die reellen Zahlen können über nOE fortgesetzt werden (vgl. PERESSINI [22], 2.8 Corollary).

1.3 Lemma: Ein Arch-Morphismus $u: A \longrightarrow B$ ist genau dann Isomorphismus, wenn er surjektiv und nOE ist.

Beweis: trivial

Auf jedem Objekt $(A,A^+,e)\in$ Arch läßt sich durch

$$\|a\| := \inf\{\lambda \mid \lambda\geq 0,\ -\lambda e\leq a\leq \lambda e\} \quad (\text{für } a\in A)$$

eine Norm einführen. Da A archimedisch geordnet ist, ergibt sich für a und $\|a\|$ die Beziehung $-\|a\|e\leq a\leq \|a\|e$. Ein Arch-Morphismus $u:A\longrightarrow B$ heißt normierte Ordnungsquotientenabbildung (nOQ), wenn $u(A^+)\supset(B^+)^o$ gilt (Inneres von B^+ bzgl. der Normtopologie). V-Arch sei die volle Unterkategorie von Arch, die aus den Objekten besteht, die in der eben eingeführten Norm vollständig sind. Für das Folgende ist es wichtig, daß A^+ ein normaler Kegel (siehe PERESSINI [22], S. 61, SCHÄFER [25], S. 215) bezüglich dieser Norm ist (das folgt z. B. aus Kriterium 3.1(e) bei SCHÄFER, S. 215). Wir erwähnen noch, daß jeder Morphismus in Arch stetig in den zugehörigen Normtopologien ist und daß seine Norm gleich 1 ist.

Ein Morphismus von A ($A\in$ Arch) in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (in natürlicher Weise als archimedischer Vektorraum aufgefaßt) heißt ein positives, normalisiertes Funktional. Die Menge aller dieser Funktionale wird mit $\mathcal{K}A$ bezeichnet. Diese Menge ist eine konvexe Teilmenge aller in der Normtopologie stetigen, linearen Funktionale. $\mathcal{K}A$ ist nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki (ALAOGLU [1], BOURBAKI [9]) kompakt in der Topologie $\sigma(A^*,A)$, denn $\mathcal{K}A$ ist $\sigma(A^*,A)$-abgeschlossen in der Einheitskugel von A^*. Die Menge $\mathcal{K}A$ spannt den Raum A^* auf, denn der Kegel A^+ ist normal. Wir erwähnen, daß sich die Zuordnung $A\longmapsto\mathcal{K}A$ in naheliegender Weise zu einem (kontravarianten)

Funktor erweitern läßt.

Der Zusammenhang zwischen den Normen der Elemente von A und der Menge $\mathcal{K}A$ wird hergestellt durch den

1.4 Satz: Ist (A,A^+,e) Objekt in Arch, so gilt für jedes $a \in A$

$$\|a\| = \sup_{\xi \in \mathcal{K}A} |\xi(a)|$$

Zum Beweis benötigen wir einige leichte Hilfssätze (Bezeichnungen wie in 1.4).

1.5 Hilfssatz: e ist - in der Normtopologie - innerer Punkt von $A^+ \setminus \{0\}$.

Beweis: Sei $a \in A$, $\|e - a\| \leq \frac{1}{2}$. Daraus folgt $-e \leq e-a \leq e$, $a \neq 0$. Also ist $a \in A^+ \setminus \{0\}$, woraus die Inklusion $S(e,\frac{1}{2}) \subset A^+ \setminus \{0\}$ folgt.

1.6 Hilfssatz: Ist $a \notin A^+$, so existiert ein $\xi \in \mathcal{K}A$ mit $\xi(a) < 0$

Beweis: Sei B der von a erzeugte Unterraum von A.

1.Fall: $B \cap A^+ \neq \{0\}$

In diesem Fall ist notwendig $a < 0$. Wählt man daher $\xi_0 \in A^*$ mit $\xi_0(a) \neq 0$, so ist $\xi_0 = \xi_1 - \xi_2$ mit positiven (nicht notwendig normalisierten) Funktionalen ξ_1, ξ_2. Nach Voraussetzung ist $(\xi_1(a), \xi_2(a)) \neq (0,0)$. Sei etwa $\xi_1(a) \neq 0$, wegen $a < 0$ also $\xi_1(a) < 0$. Durch Normalisieren läßt sich daher erreichen, daß ein geeignetes Vielfaches von ξ_1 die gewünschten Eigenschaften hat.

2.Fall: $B \cap A^+ = \{0\}$

Nach 1.5 Hilfssatz hat $A^+ \setminus \{0\}$ einen inneren Punkt. Darüberhinaus ist $A^+ \setminus \{0\}$ konvex und trifft B nicht. Folglich existiert eine abgeschlossene Hyperebene H, die B umfaßt und das Innere von A^+ nicht trifft

(vgl. ROBERTSON-ROBERTSON [24], Kapitel II, Satz 6). Sei ξ_0 das Funktional, das auf H Null ist und in e den Wert 1 hat. Aus der Konvexität von A^+ folgt sofort, daß ξ_0 positiv ist, also zu $\mathcal{K}A$ gehört.

Wir haben damit bewiesen, daß zu $a \notin A^+$ ein $\xi \in \mathcal{K}A$ mit $\xi(a) \leq 0$ existiert. Für solche a existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß auch $b := a + \varepsilon(\|a\|e - a)$ nicht zu A^+ gehört (andernfalls wäre $-a \leq \varepsilon(\|a\|e - a)$ für alle $\varepsilon > 0$ und folglich $a \in A^+$). Nach dem schon Bewiesenen existiert ein $\xi \in \mathcal{K}A$ mit $\xi(b) \leq 0$. Dann aber gilt

$$\xi(a) \leq \frac{-\varepsilon\|a\|}{1-\varepsilon} < 0 \quad \text{(da o. E. } \varepsilon < 1 \text{ wählbar).}$$

Wir beweisen nun 1.4:

Sei $a \in A$, $R_a := \{\lambda \mid \lambda \geq 0,\ -\lambda e \leq a \leq \lambda e\}$, also $\|a\| = \inf R_a$. Für $\|a\| = 0$ (d. h. $a = 0$) ist nichts zu beweisen. Sei also $\|a\| > 0$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $\|a\| - \varepsilon > 0$ gilt. Dann ist $r := \|a\| - \varepsilon \notin R_a$, d. h. $-re \not\leq a$ oder $a \not\leq re$. Nach 1.5 existiert ein $\xi \in \mathcal{K}A$ mit $\xi(a + re) \leq 0$ oder $\xi(re - a) \leq 0$. Folglich ist $\xi(a) \leq -r$ oder $r \leq \xi(a)$, also $|\xi(a)| \geq r = \|a\| - \varepsilon$. Damit ist $\sup_{\xi \in \mathcal{K}A} |\xi(a)| \geq \|a\| - \varepsilon$. Da diese Ungleichung für jedes ε $(0 < \varepsilon < \|a\|)$ gilt und trivialerweise $\|a\| \geq \sup|\xi(a)|$ ist, folgt $\|a\| = \sup_{\xi \in \mathcal{K}A} |\xi(a)|$.

Sind (A,A^+,e) und (B,B^+,e') Objekte in Arch, so lassen sich verschiedene sinnvolle Tensorprodukte dieser beiden Räume definieren. Ausführliche Untersuchungen dieser Tensorprodukte findet man in HULANICKI-PHELPS [17], DAVIES-VINCENT SMITH [13]

und NICOLAE [21]. Ist $A \otimes B$ der lineare Tensorraum von A und B, so sind

$$P_p := \{ \sum a_i \otimes b_i \mid a_i \in A^+,\ b_i \in B^+ \} \quad \text{und}$$

$$P_\varepsilon := \{ \sum a_i \otimes b_i \mid \sum \xi(a_i)\eta(b_i) \geq 0 \text{ für } (\xi,\eta) \in \mathcal{K}A \times \mathcal{K}B \}$$

Ordnungskegel dieses Raumes; $e \otimes e'$ ist Ordnungseinheit bzgl. beider Ordnungen. Wir identifizieren nun $A \otimes B$ mit einem Unterraum von $\mathcal{C}(\mathcal{K}A \times \mathcal{K}B)$ durch die Vorschrift

$$\sum a_i \otimes b_i \longleftrightarrow \big((\xi,\eta) \longmapsto \sum \xi(a_i)\eta(b_i) \big).$$

Die durch P_ε auf $A \otimes B$ induzierte Ordnung ist offensichtlich die natürliche Ordnung von $\mathcal{C}(\mathcal{K}A \times \mathcal{K}B)$, eingeschränkt auf $A \otimes B$. Folglich ist die P_ε-Ordnungstopologie gerade die Normtopologie von $\mathcal{C}(\mathcal{K}A \times \mathcal{K}B)$. Da - wegen $P_\varepsilon \supset P_p$ - die Normtopologie von P_p feiner als die von P_ε ist, ist der Abschluß P_p^- von P_p in der P_p-Topologie wieder ein Ordnungskegel. Man weist leicht nach, daß die Ordnungen P_p^- und P_ε archimedisch sind. Mit $A \otimes_p B$ bzw. $A \otimes_\varepsilon B$ werden wir die archimedischen Vektorräume $(A \otimes B, P_p^-, e \otimes e')$ bzw. $(A \otimes B, P_\varepsilon, e \otimes e')$, mit $A \hat{\otimes}_p B$ bzw. $A \hat{\otimes}_\varepsilon B$ deren Vervollständigungen gemäß Kapitel III bezeichnen.
Wir bemerken, daß $A \otimes_p B$ die üblichen universellen Eigenschaften eines projektiven Tensorproduktes in der Kategorie Arch hat. Für Arch-Morphismen $f: A_1 \longrightarrow B_1$ und $g: A_2 \longrightarrow B_2$ läßt sich $f \otimes g$ als lineare Abbildung so definieren, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_1 \times A_2 & \xrightarrow{f \times g} & B_1 \times B_2 \\ \downarrow \omega & & \downarrow \omega \\ A_1 \otimes A_2 & \xrightarrow{f \otimes g} & B_1 \otimes B_2 \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

(ω ist die universelle Abbildung vom kartesischen Produkt in den Tensorraum.) $f\otimes g$ ist durch $f\otimes g(\sum a_i\otimes b_i) := \sum f(a_i)\otimes g(b_i)$ erklärt. Man rechnet leicht nach, daß $f\otimes g$ Arch-Morphismus ist (insbesondere also stetig ist), wenn man die Tensorprodukte $A_i\otimes B_i$ $(i=1,2)$ mit den P_ε-Ordnungskegeln versieht. Trivialerweise ist $f\otimes g$ positiv bezüglich der P_p-Ordnungen. Wegen der Stetigkeit in den P_p-Topologien folgt daraus die Positivität bezüglich der P_p^--Ordnungen.
Also ist $f\otimes g$ Arch-Morphismus in beiden auf dem linearen Tensorraum eingeführten Ordnungen. Wir schreiben dann

$$f\otimes_p g : A_1\otimes_p B_1 \longrightarrow A_2\otimes_p B_2$$
$$f\otimes_\varepsilon g : A_1\otimes_\varepsilon B_1 \longrightarrow A_2\otimes_\varepsilon B_2 \quad .$$

Mit Hilfe des projektiven Tensorproduktes kompakter, konvexer Mengen läßt sich ein weiteres Tensorprodukt in Arch definieren (vergleiche das folgende Kapitel). Wir erklären für $U,V \in \mathrm{Arch}$ das Tensorprodukt $U\otimes_\varepsilon V$ durch die Vorschrift

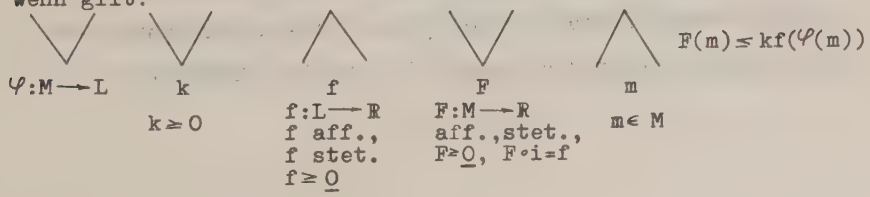
$$U\otimes_\varepsilon V := \mathcal{A}(\mathcal{K}U\otimes_\pi \check{\mathcal{K}}V) \ .$$

Das Tensorprodukt $f\otimes_\varepsilon g$ der Morphismen f,g in Arch wird durch $f\otimes_\varepsilon g := \mathcal{A}(\mathcal{K}f\otimes_\pi \mathcal{K}g)$ definiert.

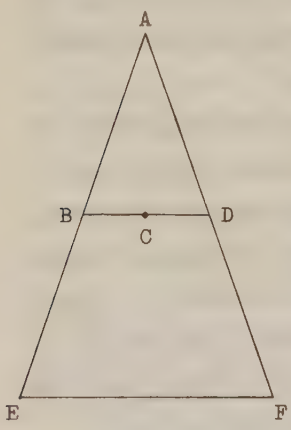
II. KONVEXE MENGEN

Eine Teilmenge K eines $\mathbb{R}$-linearen Raumes heißt konvexe Menge, wenn sie mit je zwei Elementen auch deren affine Kombinationen enthält, d. h. wenn für $k,l \in K$ und $\lambda \in [0,1]$ stets $\lambda k+(1-\lambda)l \in K$ gilt. Wir werden im folgenden fast ausschließlich kompakte, konvexe Mengen in separierten, lokalkonvexen Vektorräumen über $\mathbb{R}$ betrachten.

Sind K und L konvexe Mengen, so heißt eine Abbildung $f:K \longrightarrow L$ affin, wenn für $k,l \in K$ und $\lambda \in [0,1]$ stets $f(\lambda k+(1-\lambda)l) = \lambda f(k) + (1-\lambda)f(l)$ erfüllt ist. Die Kategorie aller kompakten, konvexen Mengen und aller stetigen, affinen Abbildungen werden wir mit Kompkonv bezeichnen. Ein surjektiver Morphismus wird affine Quotientenabbildung (AQ) genannt. Ein injektiver Morphismus $i:K \longrightarrow L$ ($K,L \in$ Kompkonv) heißt affine Einbettung (AE), wenn sich jede stetige, affine, strikt positive Abbildung $f:K \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, affin und nichtnegativ über i auf L fortsetzen läßt. Eine AE heißt beschränkte AE (bAE), wenn es eine Konstante k_o gibt, für die gilt: zu jeder stetigen, affinen, strikt positiven Funktion $f:K \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert eine Fortsetzung f' auf L (stetig, affin und nichtnegativ), so daß $\|f'\|$ nicht größer als $k_o\|f\|$ ist. Eine noch kleinere Klasse von Unterobjekten der Kategorie Kompkonv wird durch folgende Definition erklärt: Ein injektiver Morphismus $i:L \longrightarrow M$ heißt Schnitt, wenn gilt:



Aus den Definitionen folgt unmittelbar die Implikation Schnitt $\Longrightarrow$ bAE $\Longrightarrow$ AE . Im Kapitel IV werden Bedingungen angegeben, unter denen im $\mathbb{R}^n$ eine injektive Abbildung ein Schnitt ist. Jedes Retrakt in der Kategorie Kompkonv ist ein Schnitt. Es gibt aber Schnitte, die kein Retrakt sind, wie das folgende Beispiel zeigt:



Sei L die Strecke von B nach D, M das Dreieck AEF und $i:L \longrightarrow M$ die Einbettungsabbildung. Nicht jede affine Funktion auf L läßt sich normerhaltend fortsetzen (z.B. die Funktion, die in B Null und in D Eins ist). Also ist $i:L \longrightarrow M$ kein Retrakt. Definiert man aber $\varphi:M \longrightarrow L$ durch $\varphi(m) := C$, so ist i Schnitt mit der Konstanten k=4. Das liegt daran, daß für $f \geq \underline{0}$ stets $f(C) \geq \frac{1}{2}\|f\|$ gilt.

Kompkonv ist volle Unterkategorie der Kategorie aller präkompakten, konvexen Mengen (präkompakt im Sinne von BOURBAKI [9]) und aller gleichmäßig stetigen, affinen Abbildungen Präkompkonv.

Ist $K \in$ Kompkonv, so sei $\mathcal{A}K$ der (vollständige) archimedische Vektorraum aller reellwertigen, stetigen, affinen Funktionen auf K (die positiven Elemente von $\mathcal{A}K$ sind die überall nichtnegativen Funktionen). Die Funktion, die konstant gleich c auf K ist ($c \in \mathbb{R}$), werden wir mit $\underline{c}$ bezeichnen. Die Funktion $\underline{1}$ ist Ordnungseinheit des Raumes $\mathcal{A}K$. Für $K' \in$ Präkompkonv

sei $\mathcal{A}_g K'$ der Raum aller reellwertigen, gleichmäßig stetigen, affinen Abbildungen auf K'. Die Zuordnungen $K \longmapsto \mathcal{A}K$ und $K' \longmapsto \mathcal{A}_g K'$ lassen sich in naheliegender Weise zu (kontravarianten) Funktoren

$$\mathcal{A} : \text{Kompkonv} \longrightarrow \text{V-Arch}$$

$$\mathcal{A}_g : \text{Präkompkonv} \longrightarrow \text{V-Arch}$$

erweitern.

Offensichtlich gilt $\mathcal{A}_g\big|_{\text{Kompkonv}} = \mathcal{A}$.

Der Zusammenhang zwischen den Funktoren $\mathcal{K}$ und $\mathcal{A}$ wird in Kapitel III näher untersucht.

2.1 Lemma: Ist $f: K \longrightarrow L$ Morphismus in Kompkonv und $u: A \longrightarrow B$ Morphismus in Arch, so gilt:

(i) $f\,AQ \iff \mathcal{A}f\,nOE$

(ii) $f\,AE \iff \mathcal{A}f\,nOQ$

(i) $u\,nOQ \iff \mathcal{K}u\,AE$ (falls $A,B \in$ V-Arch)

(ii) $u\,nOE \Longrightarrow \mathcal{K}u\,AQ$ ("$\Longleftarrow$", falls $A,B \in$ V-Arch)

Beweis: trivial (zur Dualität vgl. Kapitel III)

Ist K eine konvexe Menge, so heißt ein Punkt $x \in K$ Extremalpunkt von K, wenn $K \setminus \{x\}$ konvex ist. Die Menge aller Extremalpunkte von K werden wir mit ex K bezeichnen. Eine konvexe Teilmenge S von K ($S \neq \emptyset$) heißt Seite, wenn $\lambda k + (1-\lambda) l \in S$ ($k,l \in K$, $0 < \lambda < 1$) $k,l \in S$ impliziert.

Ist M eine beliebige, nicht leere Teilmenge eines topologischen Vektorraumes, so wird mit co M die kleinste konvexe Menge bezeichnet, die M umfaßt. $\overline{\text{co}}$ M ist die abgeschlossene Hülle von co M.

Ist K eine kompakte Menge in einem lokalkonvexen Vektorraum, so ist im allgemeinen co K nicht kompakt. Es gilt aber das einfache, für das Folgende wichtige

2.2 Lemma: Sind K und L kompakte, konvexe Teilmengen eines separierten topologischen Vektorraumes, so ist co $(K \cup L)$ kompakt. Insbesondere ist co $(K \cup L) = \overline{\text{co}}\ (K \cup L)$.

Beweis: co $(K \cup L)$ ist das stetige Bild der kompakten Menge $K \times L \times [0,1]$ unter der Abbildung $(k,l,\lambda) \longmapsto \lambda k+(1-\lambda)l$.

Bemerkung: Für co $(K \cup L)$ werden wir auch co (K,L) schreiben. Entsprechend ist die Schreibweise co $(K_1,\ldots,K_n)$ bzw. co $(K,k_1,\ldots,k_n)$ zu verstehen.

Für die Extremalpunkte der konvexen Hülle gilt das

2.3 Lemma: Sind K und L kompakte und konvexe Teilmengen des gleichen Raumes, so ist $\text{ex co } (K,L) \subset \text{ex } K \cup \text{ex } L$.

Beweis: Aus dem Satz von Krein-Milman (KREIN-MILMAN [18]) folgt sofort $\text{ex co } (K,L) \subset \overline{\text{ex } K} \cup \overline{\text{ex } L}$. Wegen $K,L \subset \text{co } (K,L)$ können Punkte aus $\overline{\text{ex } K} \setminus \text{ex } K$ bzw. $\overline{\text{ex } L} \setminus \text{ex } L$ keine Extremalpunkte von co (K,L) sein.

Ist $K \in \text{Kompkonv}$, so ist der Raum aller affinen, stetigen Funktionale $\mathcal{A}K$ eine schwer zu überschauende Menge. Daher ist folgender Satz von großer Bedeutung (PHELPS [23], Prop. 4.5).

2.4 Satz: Sei K eine kompakte, konvexe Teilmenge des separierten, lokalkonvexen Raumes E. Dann ist

$$\left\{ f\big|_K + \underline{c} \;\middle|\; c \in \mathbb{R},\ f:E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetige Linearform} \right\}$$

eine (in der Normtopologie) dichte Teilmenge von $\mathcal{A}K$.

Als Anwendung dieses Satzes beweisen wir das

2.5 Lemma: Es sei $K \in$ Kompkonv, $0 \in K$. Ist dann $f \in \mathcal{A}K$ mit $f(0) = 0$, so ist f "linear" auf K, d. h. für $x_1, \ldots, x_n \in K$, $\sum \alpha_i x_i \in K$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) gilt $f(\sum \alpha_i x_i) = \sum \alpha_i f(x_i)$.

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ existieren $g \in E^*$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $\|g|_K + c - f\| < \varepsilon$. Wegen $f(0) = 0$ ist $|c| < \varepsilon$. Damit ist für $x, y \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(\alpha x+\beta y)-\alpha f(x)-\beta f(y)| &\leq |g(\alpha x+\beta y)+c-f(\alpha x+\beta y)| + |c| + \\ &+ |\alpha|\,|f(x)-g(x)-c| + |\beta|\,|f(y)-g(y)-c| \\ &+ |c|\,(|\alpha| + |\beta|) \\ &\leq 2\varepsilon(1+|\alpha| + |\beta|) \end{aligned}$$

Folglich gilt $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$, woraus die Behauptung durch einen einfachen Induktionsschluß folgt.

Bemerkung: Das Lemma läßt sich - mit etwas mehr Rechenaufwand - natürlich auch rein algebraisch beweisen.

Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß jedes Objekt $K \in$ Kompkonv "normal" in seinen Oberraum eingebettet ist, d. h. daß K in einer abgeschlossenen Hyperebene liegt, die 0 nicht enthält und daß K den Oberraum aufspannt. Man kann z. B. K auf natürliche Weise normal in $(\mathcal{A}K)^*$, den stetigen Dualraum von $\mathcal{A}K$, einbetten. Dazu ist nur $k \in K$ mit dem Funktional $f \longmapsto f(k)$ zu identifizieren und $(\mathcal{A}K)^*$ mit der schwachen Topologie $\sigma((\mathcal{A}K)^*, \mathcal{A}K)$ zu versehen. Diesen auf kanonische Weise definierten Oberraum von K werden wir mit $\underline{\mathcal{L}K}$ bezeichnen. Ist $\mathcal{L}^+K$ der von K in $\mathcal{L}K$ erzeugte Kegel, so ist $(\mathcal{L}K, \mathcal{L}^+K)$ ein archimedisch geordneter Vektorraum (dessen positiver Kegel sogar eine kompakte Basis besitzt).
Die Eigenschaften dieser normalen Einbettung sind im folgen-

den Lemma zusammengefaßt:

2.6 Lemma: Sind K und L kompakte, konvexe Mengen und ist $f:K \longrightarrow L$ eine stetige, affine Abbildung, so existiert genau eine stetige, positive, lineare Fortsetzung $\mathcal{L}f: \mathcal{L}K \longrightarrow \mathcal{L}L$ von f. Jedes $g \in \mathcal{A}K$ ist eindeutig zu einem stetigen, linearen Funktional $\mathcal{L}g: \mathcal{L}K \longrightarrow \mathbf{R}$ fortsetzbar. $\mathcal{L}g$ ist genau dann positiv, wenn $g \geq \underline{0}$ gilt.

Die Zuordnung $K \longmapsto \mathcal{L}K$ bzw. $f \longmapsto \mathcal{L}f$ ist ein (kovarianter) Funktor von der Kategorie Kompkonv in die Kategorie der geordneten, lokalkonvexen Vektorräume.

Beweis: Sei $f:K \longrightarrow L$ Morphismus in Kompkonv. Für $\xi \in (\mathcal{A}K)^*$ und $h \in \mathcal{A}L$ definieren wir $(\mathcal{L}f(\xi))(h) := \xi(h \circ f)$. Damit ist $\mathcal{L}f(\xi)$ linear auf $\mathcal{A}L$. Die Stetigkeit von $\mathcal{L}f(\xi)$ ist evident. Da $\mathcal{L}f$ offensichtlich linear ist, bleibt nur noch die Stetigkeit zu zeigen. Für $h \in \mathcal{A}L$ gilt $\widetilde{h} \circ \mathcal{L}f = \widetilde{h \circ f}$ (mit $\sim$ wird die Auswertungsabbildung bezeichnet), und $h \circ f$ ist stetig. Die Stetigkeit von $\mathcal{L}f$ folgt nun daraus, daß $\mathcal{L}L$ schwache Topologie trägt. Da K den Raum $\mathcal{L}K$ erzeugt, ist $\mathcal{L}f$ eindeutig bestimmt. Die anderen Aussagen des Lemmas sind leicht nachzuweisen (die stetige, lineare Fortsetzung von $g \in \mathcal{A}K$ wird durch $\xi \longmapsto \xi(g)$ definiert).

Besonders wichtig sind solche kompakten, konvexen Mengen K, für die $(\mathcal{L}K, \mathcal{L}^+K)$ ein Vektorverband ist: diese Mengen heißen Choquet-Simplexe oder auch einfach Simplexe. Implizit taucht dieser Begriff erstmals bei CLARKSON [12] auf, die ersten grundlegenden Arbeiten stammen von CHOQUET-MEYER [11] und

BAUER [4], [5]. Zusammenfassungen dieser Ergebnisse findet man bei BAUER [3] und PHELPS [23].

Sind K,L und M konvexe Mengen, so heißt eine Abbildung $\varphi: K \times L \longrightarrow M$ <u>biaffin</u>, wenn für jedes $k \in K$ und jedes $l \in L$ die Abbildungen $\varphi(k,\cdot): L \longrightarrow M$ und $\varphi(\cdot,l): K \longrightarrow M$ affin sind.

Sind K, L und M Objekte aus Kompkonv, so soll die Stetigkeit von φ stets als gleichzeitige Stetigkeit in beiden Variablen, d. h. als Stetigkeit in der Produkttopologie von $K \times L$, verstanden werden.

In der Kategorie Kompkonv lassen sich sinnvoll mehrere Tensorprodukte definieren (vgl. für das Folgende SEMADENI [26], BEHRENDS-WITTSTOCK [6], BEHRENDS [7]). Das projektive Tensorprodukt in dieser Kategorie wird in Analogie zum projektiven Tensorprodukt linearer Räume durch universelle Eigenschaften definiert:

Sind $K,L \in$ Kompkonv, so heißt eine kompakte, konvexe Menge $K \otimes_\pi L$ projektives Tensorprodukt von K und L, wenn eine stetige, biaffine Abbildung $\omega_\pi : K \times L \longrightarrow K \otimes_\pi L$ existiert, so daß jede biaffine, stetige Abbildung von $K \times L$ in ein Kompkonv-Objekt M eindeutig über ω_π faktorisierbar ist.

Das Paar $(\omega_\pi, K \otimes_\pi L)$ ist durch diese universelle Eigenschaft bis auf Isomorphie in Kompkonv eindeutig bestimmt. Zwei weitere Tensorprodukte $K \otimes_\varepsilon L$ und $K \otimes_\iota L$ werden durch $K \otimes_\varepsilon L := \mathcal{K}(\mathcal{A}K \otimes_\varepsilon \mathcal{A}L)$ bzw. $K \otimes_\iota L := \mathcal{K}(\mathcal{A}K \otimes_p \mathcal{A}L)$ definiert. Tensorprodukte sollen im folgenden zur Charakterisierung von

Simplexen herangezogen werden.

In BEHRENDS-WITTSTOCK [6] sind einige Eigenschaften dieser Tensorprodukte bewiesen, von denen wir in Kapitel IV Gebrauch machen werden:

1) Für die Extremalpunkte des projektiven Tensorproduktes gilt $\mathrm{ex}(K \otimes_\pi L) = \omega_\pi(\mathrm{ex}\, K \times \mathrm{ex}\, L)$
2) Durch $(\omega_\varepsilon(k,l))(\sum f_i \otimes g_i) := \sum f_i(k) g_i(l)$ läßt sich eine biaffine, stetige Abbildung $\omega_\varepsilon : K \times L \longrightarrow K \otimes_\varepsilon L$ definieren. Es gilt $\mathrm{ex}(K \otimes L) = \omega_\varepsilon(\mathrm{ex}\, K \times \mathrm{ex}\, L)$
3) Tensorprodukte von zwei Morphismen in Kompkonv lassen sich in naheliegender Weise erklären
4) Ist K oder L ein Simplex, so stimmen die drei Tensorprodukte (bis auf einen Isomorphismus in Kompkonv) überein
5) Sind K und L Simplexe, so sind auch die drei Tensorprodukte Simplexe
6) Mit $K \otimes_\iota L = K \otimes_\pi L$ gilt auch $K \otimes_\iota L = K \otimes_\varepsilon L$

III. DUALITÄT DER KATEGORIEN V-ARCH UND KOMPKONV

Zwei Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen dual, wenn Funktoren $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ existieren, so daß die Komposita $F \circ G$ bzw. $G \circ F$ natürlich isomorph zu den identischen Funktoren der jeweiligen Kategorien sind. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ duale Kategorien, so lassen sich Eigenschaften von $\mathcal{A}$ in der Kategorie $\mathcal{B}$ und umgekehrt untersuchen.

Es ist bekannt, daß die Kategorien V-Arch und Kompkonv dual bezüglich der Funktoren

$$\mathcal{A}: \text{Kompkonv} \longrightarrow \text{V-Arch}$$

und $\mathcal{K}: \text{V-Arch} \longrightarrow \text{Kompkonv}$ sind.

Die natürliche Isomorphie $\mathcal{K} \circ \mathcal{A} \cong 1_{\text{Kompkonv}}$ folgt aus einem allgemeinen Satz von H. BAUER [4] (vgl. auch BEHRENDS [7]), die Beziehung $\mathcal{A} \circ \mathcal{K} \cong 1_{\text{V-Arch}}$ wird bei ALFSEN [2] in einem allgemeineren Zusammenhang mit Hilfe tiefliegender funktionalanalytischer Sätze gezeigt. Im folgenden wird die Dualität direkt und elementar bewiesen.

1) $\mathcal{K}\mathcal{A} \cong 1_{\text{Kompkonv}}$

Ist $K \in \text{Kompkonv}$, so definieren wir $\tau_K: K \longrightarrow \mathcal{K}\mathcal{A}K$ durch $(\tau_K(k))(f) := f(k)$ für $f \in \mathcal{A}K$ und $k \in K$. Man weist unmittelbar nach, daß τ_K eine affine, stetige und injektive Abbildung ist und die Zuordnung $K \longrightarrow \tau_K$ in K natürlich ist. Die Isomorphie $\mathcal{K}\mathcal{A} \cong 1_{\text{Kompkonv}}$ ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß τ_K für jedes $K \in \text{Kompkonv}$ surjektiv ist (denn eine bijektive, stetige Abbildung zwischen Kompakta ist ein Homöomorphismus, und eine natürliche Trans-

formation, die jedem Objekt einen Isomorphismus der Kategorie zuordnet, ist eine natürliche Isomorphie).
Wir nehmen daher an, daß für ein $K \in$ Kompkonv ein Element $k_o \in \mathcal{K}\mathcal{A}K \setminus$ Bild τ_K existiert. Da $\tau_K(K)$ kompakt und konvex ist, existiert ein stetiges, lineares Funktional ξ auf dem Oberraum von $\mathcal{K}\mathcal{A}K$ (d. h. auf $(\mathcal{A}K)^*$), welches k_o und $\tau_K(K)$ trennt. Da $(\mathcal{A}K)^*$ schwache Topologie trägt, existiert ein $f \in \mathcal{A}K$, so daß $\xi(\eta) = \eta(f)$ für alle $\eta \in (\mathcal{A}K)^*$ gilt. Da ξ die Mengen $\{k_o\}$ und $\tau_K(K)$ trennt (etwa $\xi(k_o) > 1$, $\xi(\tau_K(K)) \leq 1$), folgt $k_o(f) > 1$ und $f(k) \leq 1$ für alle $k \in K$, also $f \leq \underline{1}$. Das steht im Widerspruch dazu, daß k_o positiv und normalisiert ist.

2) $\mathcal{A}\mathcal{K} \cong 1_{\text{V-Arch}}$

Ist $A \in$ V-Arch, so definieren wir $\eta_A : A \longrightarrow \mathcal{A}\mathcal{K}A$ durch $(\eta_A(a))(\xi) := \xi(a)$ für $a \in A$ und $\xi \in \mathcal{K}A$. Offensichtlich ist dann η_A eine in A natürliche Transformation. Nach 1.4 Satz gilt für jedes $A \in$ V-Arch und jedes $a \in A$

$$\|a\| = \sup_{\xi \in \mathcal{K}A} |\xi(a)|$$

$$= \|\eta_A(a)\| \quad .$$

Folglich ist η_A isometrisch, insbesondere also injektiv. Wir zeigen nun die Surjektivität von η_A. Da A vollständig in der induzierten Norm ist und η_A isometrisch ist, reicht es zu zeigen, daß Bild η_A eine dichte Teilmenge von $\mathcal{A}\mathcal{K}A$ umfaßt. Sei $f|_{\mathcal{K}A} \in \mathcal{A}\mathcal{K}A$ Einschränkung einer stetigen Linearform f auf dem Oberraum von $\mathcal{K}A$, d. h. auf A^*. Da A^* mit der schwachen Topologie $\sigma(A^*, A)$ versehen ist, existiert

ein $a \in A$, so daß für $\xi \in \mathcal{K}_A$ stets $f(\xi) = \xi(a)$ gilt. Das aber bedeutet $f|_{\mathcal{K}_A} = \eta_A(a)$. Wegen $\eta_A(e) = \underline{1}$ (e Ordnungseinheit in A) folgt daraus:

Bild $\eta_A \supset \{ f|_{\mathcal{K}_A} + \underline{c} \mid c \in \mathbb{R}$, f stetige Linearform auf $A \}$.

Die rechtsstehende Menge aber liegt nach PHELPS [23] (Prop. 4.5) dicht in $\mathcal{AK}A$. Folglich ist η_A ein bijektiver Morphismus in V-Arch. Da wegen 1.6 Lemma η_A eine nOE ist, ergibt sich mit 1.3 Lemma die Isomorphie von η_A. Da dies für jedes $A \in$ V-Arch gilt, folgt:

$$\eta : 1_{\text{V-Arch}} \longrightarrow \mathcal{AK}$$

ist eine natürliche Isomorphie.

Bemerkungen:

a) Wir weisen darauf hin, daß als einziger nichttrivialer Satz der Satz von Hahn-Banach herangezogen wurde (in 1 beim Nachweis der Surjektivität von τ_K, in 2 zum Beweis, daß η_A isometrisch und Ordnungseinbettung ist und implizit im Satz von PHELPS).

b) Aus der oben bewiesenen Dualität läßt sich leicht die Möglichkeit herleiten, archimedische (in der Ordnungsnorm nicht notwendig vollständige) Vektorräume und präkompakte konvexe Mengen zu vervollständigen.

   b_1) Ist A ein archimedischer Vektorraum, so existieren ein $\hat{A} \in$ V-Arch und eine isometrische, normalisierte Ordnungseinbettung $\eta_A : A \longrightarrow \hat{A}$, so daß $\eta_A(A)$ dicht in $\hat{A}$ (versehen mit der durch die Ordnungseinheit induzierten Norm)

liegt. Zum Beweis setze man $\hat{A} := \mathcal{AK}A$ und übertrage die Beweise aus 2) auf die vorliegende Situation.
Das so konstruierte A hat folgende universelle Eigenschaft: Ist B ein Objekt in V-Arch und $\varphi : A \longrightarrow B$ ein Arch-Morphismus, so existiert genau ein Morphismus in V-Arch $\hat{\varphi} : \hat{A} \longrightarrow B$ mit $\hat{\varphi} \cdot \eta_A = \varphi$.
Offensichtlich ist das Paar $(\eta_A, \hat{A})$ durch diese Fortsetzungseigenschaft bis auf Isomorphie in V-Arch eindeutig bestimmt.

b_2) Ist $K \in$ Präkompkonv, so definieren wir $\tau_K : K \longrightarrow \mathcal{KA}_g K$ wie τ_K in 1). Wie oben weist man nach, daß τ_K injektiv ist und daß $\tau_K(K)$ dicht in $\hat{K} := \mathcal{KA}_g K$ liegt.
$\hat{K}$ hat die folgende universelle Eigenschaft (durch die das Paar $(\tau_K, \hat{K})$ bis auf Isomorphie in Kompkonv eindeutig bestimmt ist):

Ist $L \in$ Kompkonv und $\alpha : K \longrightarrow L$ ein Morphismus in Präkompkonv, so existiert genau ein Morphismus in Kompkonv $\hat{\alpha} : \hat{K} \longrightarrow L$ mit $\hat{\alpha} \cdot \tau_K = \alpha$.

IV. CHARAKTERISIERUNG VON SIMPLEXEN UND SIMPLIZIALEN RÄUMEN DURCH FORTSETZUNGS- UND LIFTUNGSEIGENSCHAFTEN

Im folgenden werden Simplexe und simpliziale Räume durch Fortsetzungs- und Liftungseigenschaften sowie durch gewisse mit verschiedenen Tensorprodukten zusammenhängende Eigenschaften charakterisiert. Da nach Kapitel III die Kategorien Kompkonv und V-Arch dual sind, ist es gleichgültig, für welche Kategorie wir die Aussagen formulieren. Wir werden Kriterien für Simplexe in Kompkonv aufstellen, Kriterien für simpliziale Räume erhält man dann durch dualisieren.

Sei K Objekt der Kategorie Kompkonv und $U := \mathcal{A}K$ der Raum der stetigen, affinen Funktionen auf K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) K ist Choquet-Simplex

(ii) U ist simplizialer Raum

(iii) Für $L \in$ Kompkonv gilt $K \otimes_\iota L = K \otimes_\tau L$

(iv) Für $V \in$ Arch gilt $U \otimes_p V = U \otimes_\varepsilon V$

(v) Für $L \in$ Kompkonv gilt $K \otimes_\iota L = K \otimes_\pi L$

(vi) Für $V \in$ V-Arch gilt $U \otimes_\varsigma V = U \otimes_p V$

(vii) Ist $\alpha : V \longrightarrow W$ eine nOE in Arch, so ist auch $\mathrm{id}\, U \otimes_p \alpha : U \otimes_p V \longrightarrow U \otimes_p W$ eine nOE

(viii) Ist $f:L \longrightarrow M$ eine AQ in Kompkonv, so ist auch $\mathrm{id}\, K \otimes_\iota f : K \otimes_\iota L \longrightarrow K \otimes_\iota M$ eine AQ

(ix) Ist $i:L \longrightarrow M$ ein Schnitt in Kompkonv, so ist $\mathrm{id}\, K \otimes_\pi i : K \otimes_\pi L \longrightarrow K \otimes_\pi M$ eine AE

(x) Ist $u:V \longrightarrow W$ Transponierte eines Schnittes in V-Arch, so ist $\mathrm{id}\, U \otimes_\varepsilon u : U \otimes_\varepsilon V \longrightarrow U \otimes_\varepsilon W$ eine nOQ

(xi) Ist $\alpha:V \rightarrowtail W$ eine nOE in Arch, so ist jede positive, normalisierte Bilinearform $\varphi: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ über $\mathrm{id}\, U \times \alpha$ auf $U \times W$ positiv und normalisiert fortsetzbar

(xii) Ist $i:L \longrightarrow M$ ein Schnitt in Kompkonv, so ist jede stetige, biaffine, strikt positive Abbildung $\varphi: K \times L \longrightarrow \mathbb{R}$ über $\mathrm{id}\, K \times i$ biaffin, stetig und nichtnegativ auf $K \times M$ fortsetzbar

(xiii) Ist $\alpha:V \longrightarrow W$ eine nOE in Arch, so ist jeder Ordvekt-Morphismus $u:V \longrightarrow \mathcal{L}K$ positiv und linear über α auf W fortsetzbar

(xiv) Wie (xiii), aber $V,W \in$ V-Arch und endlichdimensional

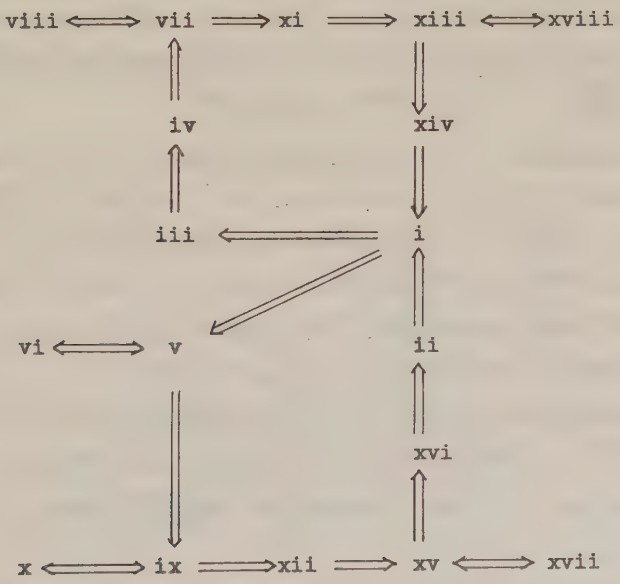
(xv) Sei $i:L \longrightarrow M$ ein Schnitt in Kompkonv. Dann läßt sich jeder Ordvekt-Morphismus $v:\mathcal{L}L \longrightarrow \mathcal{A}K$, der auf L stetig ist und L auf strikt positive Funktionen abbildet, so über $\mathcal{L}i$ auf $\mathcal{L}M$ positiv fortsetzen, daß die Fortsetzung auf M stetig ist

(xvi) Wie (xv), aber mit endlichdimensionalen L und M

(xvii) Sei $q:V \longrightarrow W$ Transponierte eines Schnittes in V-Arch. Dann ist jede positive, lineare Abbildung $u:\mathcal{L}K \longrightarrow W$, die auf K stetig ist und K in $(W^+)^\circ$ abbildet, positiv über q auf V liftbar, so daß die Einschränkung der Liftung auf K stetig ist

(xviii) Sei $f:L \longrightarrow M$ eine AQ in Kompkonv, $\mathcal{L}f:\mathcal{L}L \longrightarrow \mathcal{L}M$ die zugehörige stetige, lineare Fortsetzung. Ist dann $u:\mathcal{A}K \longrightarrow \mathcal{L}M$ ein Ordvekt-Morphismus, so ist u positiv und linear über $\mathcal{L}f$ auf $\mathcal{L}L$ liftbar

Wir beweisen die Äquivalenzen in der nachstehenden Reihenfolge:



i $\Longrightarrow$ iii

Das ist eine bekannte Implikation. Ausführliche Beweise sind bei HULANICKI-PHELPS [17] und BEHRENDS-WITTSTOCK [6] zu finden.

iii $\Longrightarrow$ iv

Sei $V \in$ Arch. Dann gilt nach Voraussetzung $\mathcal{K}(U\otimes_p V) = \mathcal{K}(U\otimes_\varepsilon V)$, also auch $\mathcal{AK}(U\otimes_p V) = \mathcal{AK}(U\otimes_\varepsilon V)$. Das bedeutet (vgl. Kapitel III) $U\hat{\otimes}_p V = U\hat{\otimes}_\varepsilon V$, wobei durch das Symbol "$\frown$" die jeweiligen Vervollständigungen bezeichnet sind. Da die zugrunde liegenden Mengen von $U\otimes_p V$ und $U\otimes_\varepsilon V$ übereinstimmen, folgt daraus $P_p^{\frown} = P_\varepsilon$ bzw. $U\otimes_p V = U\otimes_\varepsilon V$.

iv $\Longrightarrow$ vii

Lemma: Sind $\alpha_i : V_i \longrightarrow W_i$ (i=1,2) OE in Arch, so ist auch

$$\alpha_1\otimes_\varepsilon\alpha_2 : V_1\otimes_\varepsilon V_2 \longrightarrow W_1\otimes_\varepsilon W_2 \text{ OE}$$

Beweis: Elementare Sätze der Linearen Algebra garantieren, daß $\alpha_1\otimes_\varepsilon \alpha_2$ injektiv ist. Sei $\sum a_j\otimes b_j \in V_1\otimes_\varepsilon V_2$, $(\sum a_j\otimes b_j) \neq 0$. Folglich existieren $\xi_i \in \mathcal{K}V_i$ (i=1,2) mit $\sum \xi_1(a_j)\xi_2(b_j) < 0$. Da die α_i OE sind (die wir ohne Einschränkung als normalisiert annehmen können), existieren $\tilde{\xi}_i \in \mathcal{K}W_i$ mit $\tilde{\xi}_i \circ \alpha_i = \xi_i$ (i=1,2). Damit ist $\tilde{\xi}_1\otimes\tilde{\xi}_2(\sum \alpha_1(a_j)\otimes\alpha_2(b_j)) < 0$, d. h. $\sum \alpha_1(a_j)\otimes\alpha_2(b_j) \neq 0$ in $W_1\otimes_\varepsilon W_2$. Da $\alpha_1\otimes_\varepsilon\alpha_2$ positiv ist, folgt schließlich: $\alpha_1\otimes_\varepsilon\alpha_2(x) \geq 0$ d.u.n.d., wenn $x \geq 0$.

Die Implikation iv $\Longrightarrow$ vii ist nun eine leichte Anwendung des

Lemmas. Ist nämlich $\alpha : V \longrightarrow W$ eine nOE in Arch, so ist - da id U trivialerweise nOE ist - $\mathrm{id}\, U \otimes_\varepsilon \alpha : U \otimes_\varepsilon V \longrightarrow U \otimes_\varepsilon W$ nOE. Da die Funktoren $U \otimes_\varepsilon \cdot$ und $U \otimes_p \cdot$ nach Voraussetzung übereinstimmen, folgt daraus die Behauptung.

vii $\Longrightarrow$ viii

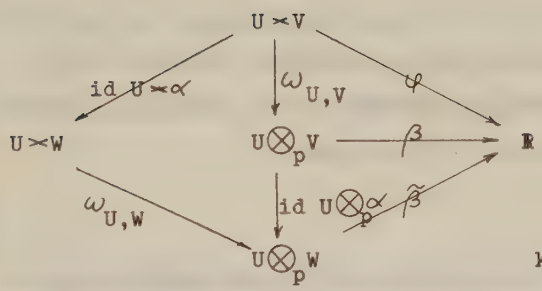
Ist $f : L \longrightarrow M$ AQ, so ist $\mathcal{A}f : \mathcal{A}M \longrightarrow \mathcal{A}L$ eine nOE. Also gilt: $\mathrm{id}\, \mathcal{A}K \otimes_p \mathcal{A}f : \mathcal{A}K \otimes_p \mathcal{A}M \longrightarrow \mathcal{A}K \otimes_p \mathcal{A}L$ ist nOE. Folglich ist $\mathrm{id}\, K \otimes_\iota f : K \otimes_\iota L \longrightarrow K \otimes_\iota M$ AQ, denn AQ und nOE sind duale Begriffe.

viii $\Longrightarrow$ vii

Ist $\alpha : V \longrightarrow W$ eine nOE in Arch, so folgt wie im Beweis von vii $\Longrightarrow$ viii, daß $\mathcal{A}(\mathrm{id}\, \mathcal{K}U \otimes_\iota \mathcal{K}\alpha) : U \hat{\otimes}_p V \longrightarrow U \hat{\otimes}_p W$ nOE ist. Dann aber ist auch $\mathrm{id}\, U \otimes_p \alpha = (\mathcal{A}(\mathrm{id}\, \mathcal{K}U \otimes_\iota \mathcal{K}\alpha))\big|_{U \otimes_p V}$ eine nOE.

vii $\Longrightarrow$ xi

Sei $\alpha : V \longrightarrow W$ eine nOE in Arch und $\varphi : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine positive, normalisierte Bilinearform. Da $U \otimes V$ Tensorprodukt von U und V ist, existiert (genau) eine Linearform $\beta : U \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\beta \circ \omega_{U,V} = \varphi$ (dabei ist $\omega_{U,V}$ die universelle Abbildung von $U \times V$ in das Tensorprodukt). Offensichtlich ist β positiv bezüglich der Ordnung P_p^- und normalisiert. Nach Voraussetzung existiert ein $\tilde{\beta} \in \mathcal{K}(U \otimes_p W)$ mit $\beta = \tilde{\beta} \circ (\mathrm{id}\, U \otimes_p \alpha)$. Definiert man $\tilde{\varphi} := \tilde{\beta} \circ \omega_{U,W}$, so ist $\tilde{\varphi} \circ (\mathrm{id}\, U \times \alpha) = \varphi$, denn das Diagramm



kommutiert.

Damit ist xi bewiesen.

xi $\Longrightarrow$ xiii

Sei $\alpha: V \longrightarrow W$ eine nOE in Arch und $u: V \longrightarrow \mathcal{L}K$ ein Morphismus in Ordvekt. Wir definieren $\varphi_u: U \prec V \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi_u(a,b) := a(u(b))$ für $a \in \mathcal{A}K = U$ und $b \in V$ (a wird als stetige Linearform auf $\mathcal{L}K$ aufgefaßt). Damit ist φ_u bilinear und positiv. Da wir ohne Einschränkung annehmen können, daß u(e) in K liegt (für $u \neq 0$ durch Anbringung eines Faktors zu erreichen), ist φ_u auch normalisiert. Sei $\tilde{\varphi}_u: U \prec W \longrightarrow \mathbb{R}$ als Fortsetzung von φ_u gemäß xi gewählt. Für $w \in W^+$ ist $\tilde{\varphi}_u(\cdot, w)$ linear und als positive Abbildung stetig, d. h. $\tilde{\varphi}_u(\cdot, w) \in (\mathcal{A}K)^*$. Da der positive Kegel von W erzeugend ist und $\tilde{\varphi}_u$ bilinear ist, gilt für jedes $w \in W$: $\tilde{\varphi}_u(\cdot, w) \in (\mathcal{A}K)^* = \mathcal{L}K$. Damit ist die durch $\tilde{u}(w) := \tilde{\varphi}_u(\cdot, w)$ definierte Abbildung $\tilde{u} : W \longrightarrow \mathcal{L}K$ die gesuchte Fortsetzung von u (denn $\tilde{u}$ ist offensichtlich positiv und stimmt auf V mit u überein).

xiii $\Longrightarrow$ xviii

Sei $f: L \longrightarrow M$ eine AQ, also $\mathcal{L}f: \mathcal{L}L \longrightarrow \mathcal{L}M$ eine OQ. Sei weiter $u: \mathcal{A}K \longrightarrow \mathcal{L}M$ Morphismus in Ordvekt. Dann ist u stetig,

denn es gilt das

Lemma: Sind $K_1, K_2 \in$ Kompkonv, $\mathcal{A}K_1$ versehen mit der Normtopologie, $\mathcal{L}K_2$ versehen mit der schwachen Topologie, so ist jede positive, lineare Abbildung von $\mathcal{A}K_1$ in $\mathcal{L}K_2$ stetig.

Beweis: Ist $u: \mathcal{A}K_1 \longrightarrow \mathcal{L}K_2$ positiv und linear, so kann man - für $u \neq 0$ - ohne Einschränkung annehmen, daß $u(\underline{1})$ in K_2 liegt. Sei φ_{K_2} das Funktional, welches die Hyperebene um K_2 erzeugt. Wir beweisen die Stetigkeit von u in 0. Ist $V \in \mathcal{U}(0)$ in $\mathcal{L}K_2$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \cdot co(K_2, -K_2) \subset V$ (Kompaktheit von K_2). Damit ist für jedes $f \in \mathcal{A}K_1$ mit $\|f\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $u(f) \in V$, denn es gilt $u(\{f \mid -\underline{1} \leq f \leq +\underline{1}\}) \subset 2co(K_2, -K_2)$. (für $f \in \{f \mid -\underline{1} \leq f \leq +\underline{1}\}$ ist nämlich $-u(\underline{1}) \leq u(f) \leq u(\underline{1}) \in K_2$. Sei etwa $\varphi_{K_2}(u(f)) \geq 0$. Dann gehört $u(\underline{1}) - u(f)$ zu $co(K_2, 0)$, also $u(f) = u(\underline{1}) - (u(\underline{1}) - u(f)) \in 2co(K_2, -K_2)$). Für $u = 0$ ist nichts zu zeigen.

Definiert man $u^*: \mathcal{A}M \longrightarrow \mathcal{L}K$ durch $u^*(g)(h) := (\mathcal{L}g \circ u)(h)$ (für $g \in \mathcal{A}M$, $h \in \mathcal{A}K$), so ist u^* Morphismus in Ordvekt (u^* ist die Transponierte von u. Dazu ist nur zu beachten, daß $\mathcal{L}K = (\mathcal{A}K)^*$ und $((\mathcal{A}M)^*)^* = \mathcal{A}M$ gilt). Da $\mathcal{L}f$ OQ ist, ist $(\mathcal{L}f)^* : \mathcal{A}M \longrightarrow \mathcal{A}L$ nOE ($(\mathcal{L}f)^*$ ist definiert durch $g \longmapsto g \circ f$). Nach Voraussetzung läßt sich u^* zu einer Abbildung $\hat{u^*}$ positiv auf $\mathcal{A}L$ fortsetzen. Sei $\hat{u} := \hat{u^*}^*: \mathcal{A}K \longrightarrow \mathcal{L}L$. Dann gilt $\mathcal{L}f \circ \hat{u} = u$, denn nach Konstruktion ist $\hat{u^*} \circ (\mathcal{L}f)^* = u^*$, und es gilt $(\mathcal{L}f)^{**} = \mathcal{L}f$, $u^{**} = u$. Da $\hat{u}$ als Transponierte einer

positiven Abbildung wieder positiv ist, ist die Behauptung bewiesen.

xviii $\Longrightarrow$ xiii

Diese Implikation wird analog zu xiii $\Longrightarrow$ xviii bewiesen.

xiii $\Longrightarrow$ xiv

trivial

xiv $\Longrightarrow$ i

K habe die Eigenschaft xiv. Wir müssen zeigen, daß $(\mathcal{L}K, \mathcal{L}^+K)$ ein Verband ist. Es reicht, die Existenz von $\sup(v_1,v_2)$ für $v_1,v_2 \in \mathcal{L}^+K$ nachzuweisen. Seien also v_1 und v_2 aus $\mathcal{L}^+K$ vorgelegt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß v_1 und v_2 bezüglich der Ordnung unvergleichbar sind.

Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{L}K$ simplizial ist bzgl. v_1,v_2 und der Menge der oberen Schranken.

Lemma: Zu $w_1,w_2 \in \mathcal{L}^+K$ mit $w_i \succeq v_j (i,j=1,2)$ existiert ein $w \in \mathcal{L}^+K$ mit $w_i \succeq w \succeq v_j (i,j=1,2)$

Beweis:

Sei e_i $(i=1,\ldots,5)$ der i-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^5$. Wir bezeichnen mit P_1 den von $K_1 := co(e_1,e_2,e_3,e_4,e_1-e_3,e_1-e_4,e_2-e_3,e_2-e_4)$ im $\mathbb{R}^4$ erzeugten Kegel (P_1 ist Ordnungskegel, da - wie man leicht nachrechnet - $0 \notin K_1$) und mit X den geordneten Vektorraum $(\mathbb{R}^4,P_1)$. Wir betten X ein in den $\mathbb{R}^5$ durch $(x_1,x_2,x_3,x_4) \longmapsto (x_1,x_2,x_3,x_4,0)$ und ordnen den $\mathbb{R}^5$ durch den von $K_2 := co(K_1,e_1-e_5,e_2-e_5,e_5-e_3,e_5-e_4)$ erzeugten Kegel $P_2 (0 \notin K_2)$.

Man zeigt leicht, daß $X \hookrightarrow Y$ OE in Ordvekt ist (wegen $P_1 = X \cap P_2$). Wir behaupten, daß man $X \hookrightarrow Y$ auch als nOE auffassen kann. Da P_2 den $\mathbb{R}^5$ aufspannt, enthält P_2 fünf linear unabhängige Vektoren und damit einen inneren Punkt. Sei $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ ein solcher innerer Punkt.

1. Fall: $x_5=0$
   Dann ist x auch innerer Punkt von P_1 in der Relativtopologie des $\mathbb{R}^4$.

2. Fall: $x_5<0$
   Jeder Punkt der Verbindungsstrecke von x nach e_5-e_3 ($\in P_2$) ist - abgesehen von e_5-e_3 - innerer Punkt von P_2. Da diese Verbindungsstrecke durch P_1 geht, ist die Existenz eines Punktes z nachgewiesen, der in P_1 und P_2 innerer Punkt (relativ zum $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^5$) ist.

3. Fall: $x_5>0$
   Analog

Wir fassen einen gemeinsamen inneren Punkt z (der nach dem Vorangegangenen existiert) als Ordnungseinheit auf (innere Punkte von Kegeln sind stets Ordnungseinheiten). Offensichtlich sind dann $(\mathbb{R}^4,P_1,z)$ und $(\mathbb{R}^5,P_2,z)$ Objekte von V-Arch, und $X \hookrightarrow Y$ ist nOE.

Wir definieren eine lineare Abbildung $u:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{L}K$ durch Festlegung der Bildwerte auf der Basis:

$u(e_1) := w_1$ $\quad u(e_2) := w_2$ $\quad u(e_3) := v_1$ $\quad u(e_4) := v_2$

Offensichtlich ist u ein Ordvekt-Morphismus. Es ist leicht nachzurechnen, daß das Bild w von e_5 unter der nach Voraus-

setzung existierenden positiven Fortsetzung der Bedingung $w_1, w_2 \geq w \geq v_1, v_2$ genügt.

Wir beweisen nun, daß $\mathcal{L}K$ ein Verband ist, d. h. daß $\sup(v_1, v_2)$ existiert. Durch Anbringen eines positiven Faktors können wir erreichen, daß v_1 und v_2 in $\mathrm{co}(\frac{1}{2}K, 0)$ liegen. Sei φ_K das stetige Funktional auf $\mathcal{L}K$, das auf K identisch 1 ist. Es gilt dann $0 < \varphi_K(v_1), \varphi_K(v_2) < 1$, $\varphi_K(v_1+v_2) \leq 1$. Sei nun
$A := \{ w \mid w \geq v_1, v_2 \ ; \ \varphi_K(w) \leq 1 \}$. Mit dieser Definition ist

1) $A \neq \emptyset$ (da $v_1+v_2 \in A$)

2) A konvex (klar)

3) $A \subset \mathrm{co}(K, 0)$ (klar)

4) A abgeschlossen, da $\mathcal{L}^+K$ abgeschlossen (vgl. Kapitel I) und
$A = \mathrm{co}(K, 0) \cap (v_1 + \mathcal{L}^+K) \cap (v_2 + \mathcal{L}^+K)$

5) A kompakt (wegen 3 und 4)

Damit nimmt φ_K auf A das Minimum an. Sei etwa $m = \min \varphi_K(A)$ und $y \in A$ so gewählt, daß $\varphi_K(y) = m$ gilt. y ist Supremum von v_1 und v_2, denn es ist

1) $y \geq v_1, v_2$ (da $y \in A$)

2) Ist v eine andere obere Schranke von v_1 und v_2, so existiert nach Lemma ein w mit $v_1, v_2 \leq w \leq v, y$. Wäre $w \neq y$, d. h. $w < y$, so folgte $\varphi_K(w) < m$ im Widerspruch zur Definition von m (denn es gilt offensichtlich $w \in A$. Man beachte, daß aus $0 < z$ stets $0 < \varphi_K(z)$ folgt). Also ist $w = y$, d. h. $y \leq v$.

Da die Existenz des Supremums für beliebige Elemente aus $\mathcal{L}^+K$

auf den vorliegenden Fall zurückgeführt werden kann, ist die Implikation xiv $\Longrightarrow$ i vollständig bewiesen.

i $\Longrightarrow$ v

Diese Implikation ist bereits bekannt. Beweise sind bei HULANICKI-PHELPS [17] und BEHRENDS-WITTSTOCK [6] zu finden.

v $\Longrightarrow$ vi

Diese Äquivalenz folgt unmittelbar aus den Definitionen der entsprechenden Tensorprodukte.

v $\Longrightarrow$ ix

Die Voraussetzung impliziert, daß K ein Simplex ist. Aus $K\otimes_\pi L = K\otimes_\iota L$ folgt nämlich $K\otimes_\varepsilon L = K\otimes_\iota L$ (vgl. Kapitel II), und die Implikation iii $\Longrightarrow$ i ist schon bewiesen.

Die Aussage ix ist eine einfache Folgerung aus dem

<u>Satz</u>: Ist K ein Simplex und $i:L \longrightarrow M$ ein Schnitt, so ist $id\, K\otimes_\iota i : K\otimes_\iota L \longrightarrow K\otimes_\iota M$ eine AE

<u>Beweis</u>:

Nach 2.1 Lemma reicht es zu zeigen, daß $id_{\mathcal{A}K}\hat{\otimes}_p\mathcal{A}i$ eine nOQ ist. Diese Aussage wird in drei Teilen bewiesen:

I. $id_{\mathcal{A}K}\hat{\otimes}_p\mathcal{A}i$ bildet $(\mathcal{A}K\hat{\otimes}_p\mathcal{A}M)^+$ dicht in $(\mathcal{A}K\hat{\otimes}_p\mathcal{A}L)^+$ ab

II. $id_{\mathcal{A}K}\hat{\otimes}_p\mathcal{A}i$ ist surjektiv

III. Ist $u:V \longrightarrow W$ ein surjektiver Morphismus zwischen Objekten von V-Arch, so ist u eine nOQ, falls $u(V^+)^- = W^+$ gilt

Beweis I:

Da die Abbildung $\mathcal{A}i:\mathcal{A}M \longrightarrow \mathcal{A}L$ den Kegel $\mathcal{A}^+M$ auf $\mathcal{A}^+L$ abbildet, wird unter der Abbildung $id\mathcal{A}K\otimes\mathcal{A}i$ der P_p-Kegel von $\mathcal{A}K\otimes\mathcal{A}M$ auf den P_p-Kegel von $\mathcal{A}K\otimes\mathcal{A}L$ abgebildet. Die Behauptung folgt nun daraus, daß die P_p-Kegel dicht liegen in den positiven Kegeln von $\mathcal{A}K\hat{\otimes}_p\mathcal{A}M$ bzw. $\mathcal{A}K\hat{\otimes}_p\mathcal{A}L$.

Beweis II:

Da K ein Simplex ist, gilt $\mathcal{A}K\otimes_p\mathcal{A}L = \mathcal{A}K\otimes_\varepsilon\mathcal{A}L$ sowie $\mathcal{A}K\otimes_p\mathcal{A}M = \mathcal{A}K\otimes_\varepsilon\mathcal{A}M$. Es reicht also zu zeigen, daß $id\mathcal{A}K\hat{\otimes}_\varepsilon\mathcal{A}i$ surjektiv ist. Dazu fassen wir $\mathcal{A}K\otimes_\varepsilon\mathcal{A}L$ bzw. $\mathcal{A}K\otimes_\varepsilon\mathcal{A}M$ als Teilräume von $\mathcal{C}(K\prec L)$ bzw. $\mathcal{C}(K\prec M)$ unter der in Kapitel I definierten Einbettung auf. In dieser Einbettung bildet $u:= id\mathcal{A}K\hat{\otimes}_\varepsilon\mathcal{A}i$ Elemente $\varphi\in\mathcal{C}(K\prec M)$ auf $\varphi\circ(id\,K\prec i)$ ab. Um die Surjektivität von u nachzuweisen, reicht es - über bekannte funktionalanalytische Sätze - zu zeigen, daß ein Vielfaches der Einheitskugel von $\mathcal{A}K\otimes_\varepsilon\mathcal{A}M$ auf eine dichte Teilmenge der Einheitskugel von $\mathcal{A}K\otimes_\varepsilon\mathcal{A}L$ abgebildet wird. Sei $\underline{0}\leq\sum f_j\otimes g_j \leq \underline{1}$ in $\mathcal{A}K\otimes_\varepsilon\mathcal{A}L$. Die Menge aller derartigen Elemente mit $f_j\succ\underline{0}$ und $g_j\succ\underline{0}$ liegt dicht im Ordnungsintervall von $\underline{0}$ bis $\underline{1}$. Das folgt daraus, daß die P_p^--Ordnung und die P_ε-Ordnung übereinstimmen. Wir setzen nun die g_j gemäß der Schnitteigenschaft von L und M fort zu positiven Funktionen G_j. Für $m\in M$ und $k\in K$ ist dann $0\leq\sum f_j(k)G_j(m)\leq k_o\sum f_j(k)g_j(\varphi(m))\leq k_o$ (dabei ist k_o die in der Definition auftretende Konstante, φ die zu L und M gehörende Schnittabbildung). Es gilt also $\underline{0}\leq\sum f_j\otimes G_j\leq \underline{k}_o$. Wegen $\sum f_j\otimes G_j\longmapsto\sum f_j\otimes g_j$ und $S(\underline{0},1)$ (Einheitskugel) = $[-1,+1]$ (Ordnungsintervall) folgt daraus,

daß das $2k_o$-fache der Einheitskugel in $\mathcal{A}_K \otimes_\varepsilon \mathcal{A}_M$ auf eine Menge abgebildet wird, die eine dichte Teilmenge der Einheitskugel in $\mathcal{A}_K \otimes_\varepsilon \mathcal{A}_L$ umfaßt.

Beweis III:

Nach dem open-mapping-Theorem ist u offen, d. h. $Z := u((V^+)^\circ)$ ist eine offene Teilmenge von $(W^+)^\circ$. Da $(V^+)^\circ$ dicht in V^+ liegt und u stetig ist, muß Z dicht in W^+ liegen.

(Ist $r: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, $r(X)^- = Y$ und $D \subset X$, $D^- = X$, so existiert zu $y \in Y$ und $U \in \mathcal{U}(y)$ ein $x \in X$ mit $r(x) \in U$. Da r stetig ist, existiert ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $r(V) \subset U$. Aus $D \cap V \neq \emptyset$ folgt $r(D) \cap U \neq \emptyset$, d. h. $r(D)^- = Y$.)

Z ist also konvex, offen und dicht in W^+. Damit gilt $Z \subset (W^+)^\circ = Z^{-\circ} = Z$, d. h. $Z = (W^+)^\circ$.

(Ist G eine offene, konvexe Menge in einem lokalkonvexen Vektorraum, so existiert zu $x \notin G$, $x \in G^-$ ein Funktional f, das auf G echt positiv und in x Null ist. Offensichtlich ist dann $f(G^-) \geq 0$. Damit läßt sich leicht zeigen, daß x kein innerer Punkt von G^- ist. Also ist $G^{-\circ} = G$.)

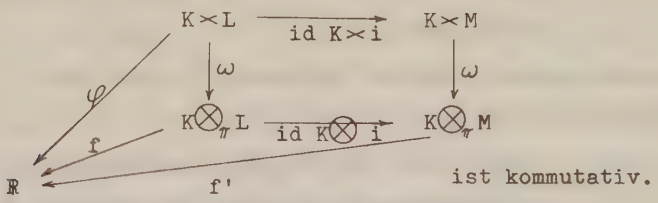
Folglich ist u eine nOQ.

$ix \Longleftrightarrow x$

Diese Äquivalenz folgt unmittelbar aus den Definitionen der entsprechenden Tensorprodukte.

ix $\Longrightarrow$ xii

Sei $i:L \longrightarrow M$ ein Schnitt und $\varphi:K \prec L \longrightarrow \mathbb{R}$ eine biaffine, stetige und strikt positive Abbildung. Da $K \otimes_\pi L$ projektives Tensorprodukt ist, existiert genau ein stetiges, affines $f:K \otimes_\pi L \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi = f \circ \omega_{\pi, K \prec L}$. Nach Voraussetzung ist $\varphi \geq \underline{\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$. Da die Extremalpunkte von $K \otimes_\pi L$ im Bild von $\omega_{\pi, K \prec L}$ enthalten sind, gilt auch $f \geq \underline{\varepsilon}$. Insbesondere ist f strikt positiv. Da $\mathrm{id}\, K \otimes_\pi i$ eine AE ist, existiert eine stetige, affine, nichtnegative Funktion $f':K \otimes_\pi M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f = f' \circ (\mathrm{id}\, K \otimes_\pi i)$. Wir definieren $\varphi':K \prec M \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi' := f' \circ \omega_{\pi, K \prec M}$. φ' ist biaffin, stetig und nichtnegativ. Darüberhinaus gilt $\varphi' \circ (\mathrm{id}\, K \prec i) = \varphi$, denn das Diagramm



ist kommutativ.

Damit ist φ' die gesuchte Fortsetzung von φ.

xii $\Longrightarrow$ xv

Sei $u:\mathcal{L}L \longrightarrow \mathcal{A}K$ ein Ordvekt-Morphismus, der auf L stetig ist und L auf strikt positive Funktionen abbildet ($i:L \longrightarrow M$ Schnitt). u induziert ein biaffines, stetiges, strikt positives Funktional $\varphi_u:K \prec L \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $\varphi_u(k,l) := (u(l))(k)$ (für $k \in K, l \in L$). Nach Voraussetzung existiert eine Fortsetzung $\varphi'_u:K \prec M \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\varphi'_u \geq \underline{0}$, biaffin und stetig). Definieren wir $u':\mathcal{L}M \longrightarrow \mathcal{A}K$ durch $u'(m)(k) := (\mathcal{L}(\varphi'_u(k,\cdot)))(m)$ (für $k \in K$ und $m \in \mathcal{L}M$), so ist offensichtlich u' linear und

positiv. Die Beziehung $u' \circ \mathcal{L}i = u$ ist ebenfalls leicht einzusehen. Die Stetigkeit von $u'|_M$ ergibt sich wie folgt:
Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so garantieren die Kompaktheit von K und die Stetigkeit von φ'_u die Existenz einer Nullumgebung U in $\mathcal{L}M$, daß für $m-m' \in U$ stets $|\varphi'_u(k,m) - \varphi'_u(k,m')| \leq \varepsilon$ $(k \in K)$, d. h. $\|\varphi'_u(\cdot,m) - \varphi'_u(\cdot,m')\| \leq \varepsilon$ gilt. Das aber bedeutet gerade die Stetigkeit von $u'|_M$.

xv $\Longrightarrow$ xvii
Sei $i: L \longrightarrow M$ ein Schnitt, $\mathcal{A}i: \mathcal{A}M \longrightarrow \mathcal{A}L$ die transponierte Abbildung. Weiter sei $u: \mathcal{L}K \longrightarrow \mathcal{A}L$ ein Ordvekt-Morphismus, so daß $u|_K$ stetig ist und u die Elemente von K auf strikt positive Funktionen abbildet. Damit ist $u^*: \mathcal{L}L \longrightarrow \mathcal{A}K$, denn ein lineares Funktional ist auf $\mathcal{L}K$ genau dann stetig, wenn es auf K stetig ist. Nach Voraussetzung ist u(K) kompakt in $\mathcal{A}L$, insbesondere also gleichgradig stetig. Daraus resultiert die Stetigkeit von u^* auf L. Da u^* auf L durch $u^*(l)(k) = u(k)(l)$ $(k \in K, l \in L)$ definiert ist, bildet u^* die Menge L auf strikt positive Funktionen ab.
u^* ist über $\mathcal{L}i$ zu einem Ordvekt-Morphismus $u^{*\prime}$ auf $\mathcal{L}M$ fortsetzbar ($u^{*\prime}$ auf M stetig). Man zeigt nun leicht, daß $u' := u^{*\prime *}$ die gesuchte Liftung von u über $\mathcal{A}i$ auf $\mathcal{A}M$ ist.

xvii $\Longrightarrow$ xv
Analog zu xv $\Longrightarrow$ xvii

xv $\Longrightarrow$ xvi
Trivial

xvi $\Longrightarrow$ ii

Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz über Schnitte im $\mathbb{R}^n$:

Lemma: L und M seien kompakte, konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $L \subset M$. Jede positive, affine Funktion auf L sei positiv auf M fortsetzbar. Gilt dann

a) $M^o \cap L \neq \emptyset$

oder b) Es existiert eine Konstante k_o, so daß für $f \geq \underline{0}$ (auf L) eine positive Fortsetzung mit Norm $\leq k_o \|f\|$ wählbar ist ,

so ist $L \hookrightarrow M$ ein Schnitt.

Beweis a:

Sei $x \in M^o \cap L$ und $F \geq \underline{0}$ affine Fortsetzung einer auf L affinen Funktion. Da x innerer Punkt von M ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $S(x, \varepsilon) \subset M$. Wir wählen $r \in \mathbb{N}$ so groß, daß $S(x, r \cdot \varepsilon) \supset M$. Man kann dann leicht zeigen, daß $F(x) \geq \frac{1}{r+1}\|F\|$ gilt. Folglich ist $L \hookrightarrow M$ ein Schnitt bezüglich der durch $\varphi(m) := x$ (für alle $m \in M$) definierten Abbildung $\varphi: M \longrightarrow L$ und der Konstanten $k = r+1$.

Beweis b:

Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $0 \in L$ gilt. Dann hat L in der euklidischen Topologie von Lin(L) (lineare Hülle) einen inneren Punkt x (L enthält nämlich dim Lin(L) linear unabhängige Elemente). Wie im Beweis a findet man nun eine Zahl $r \in \mathbb{N}$, daß für affines f auf L ($f \geq 0$) stets $f(x) \geq \frac{1}{r+1}\|f\|$ gilt. Dann ist $L \hookrightarrow M$ ein Schnitt bezüglich der Abbildung $\varphi: m \longmapsto x$ ($\varphi: M \longrightarrow L$) und der Konstanten $k = k_o \cdot (r+1)$.

Wir erinnern nun an die beim Beweis von xiv $\Longrightarrow$ i konstruier-

ten Räume X und Y. Sei M eine beliebige kompakte Basis von P_2 in Y, $L := M \cap P_1$ (P_2 hat eine kompakte Basis nach 1.2 Lemma). Mit dieser Definition ist $X = \mathcal{L}L$, $Y = \mathcal{L}M$. Darüberhinaus ist $i: L \longrightarrow M$ (Inklusion) ein Schnitt, denn die Bedingung a des eben bewiesenen Lemmas ist erfüllt (die Fortsetzungseigenschaft positiver affiner Funktionen resultiert daraus, daß $X \hookrightarrow Y$ nOE ist; der gemeinsame innere Punkt wurde schon beim Beweis von xiv $\Longrightarrow$ i konstruiert).

Seien nun u_1, u_2, v_1, v_2 in $\mathcal{A}K$ so vorgelegt, daß die Funktionen $u_i, v_j, u_i - v_j$ $(i,j=1,2)$ strikt positiv sind. Wir definieren $u: X = \mathcal{L}L \longrightarrow \mathcal{A}K$ durch

$e_1 \longmapsto u_1$ $\quad e_2 \longmapsto u_2$ $\quad e_3 \longmapsto v_1$ $\quad e_4 \longmapsto v_2$.

u bildet P_1 - insbesondere also L - (abgesehen vom Nullpunkt) auf strikt positive Funktionen ab. Da u positiv und linear ist, existiert nach Voraussetzung eine positive Fortsetzung von u über $\mathcal{L}i$ auf $\mathcal{L}M$. Offensichtlich liegt das Bild w von e_5 unter dieser Fortsetzung zwischen u_1, u_2 und v_1, v_2:

$u_1, u_2 \geq w \geq v_1, v_2$.

Damit hat $\mathcal{A}K$ Zwischenwerte für Funktionen, deren Differenzen strikt positiv sind (schwache Rieszsche Zwischenwerteigenschaft). Daraus aber folgt bereits mit Hilfe einer funktionalanalytischen Technik die Simplizialität von $\mathcal{A}K$ (vgl. EDWARDS [15]).

ii $\Longrightarrow$ i

Wir zeigen, daß $\mathcal{L}K = (\mathcal{A}K)^*$ ein Verband ist. Hinreichend dafür ist, daß für $x, y \in \mathcal{L}^+K$ die Beziehung $[0,x]+[0,y] \supset$

$[0,x+y]$ gilt (vgl. SCHÄFER [25] §5, 1.4), wo $[a,b]$ das Ordnungsintervall von a bis b bezeichnet. Sei $z \in [0,x+y]$. Dann gilt $0,z-y \preceq x,z$, und nach Voraussetzung existiert ein w mit $0,z-y \preceq w \preceq x,z$. Damit ist $x \succeq w \succeq 0$ sowie $y \succeq z-w \succeq 0$, d. h. $z \in [0,x]+[0,y]$.

In der Reihe der vorstehenden Äquivalenzen fällt auf, daß die Gleichheit der Tensorprodukte $K \otimes_\pi \cdot$ und $K \otimes_\varepsilon \cdot$ zur Charakterisierung nicht herangezogen wurde. Es ist nicht möglich, Simplexe dadurch zu charakterisieren, denn es gilt der

Satz: Sind K und L Objekte von Kompkonv und ist K endlichdimensional, so gilt $K \otimes_\pi L = K \otimes_\varepsilon L$

Beweis:

Wir nehmen an, daß K normal in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet ist und im Ordnungsintervall Q zwischen $(0,\ldots,0)$ und $(1,\ldots,1)$ enthalten ist. Ist dann $\varphi : K \times L \longrightarrow \mathbb{R}$ biaffin und stetig, so läßt sich φ so zu einer biaffinen, stetigen Abbildung $\psi : Q \times L \longrightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, daß $\psi(0,\cdot) = \underline{0}$ gilt. Man zeigt nun leicht mit Hilfe von 2.5 Lemma, daß $\psi = \sum f_j \otimes g_j \in \mathcal{A}K \otimes_\varepsilon \mathcal{A}L \subset \mathcal{C}(K \times L)$ ist, wo die f_j gewisse Projektionen und die g_j die Werte von ψ auf den Eckpunkten von Q sind.

Aus dieser Tatsache folgt, daß für $M \in$ Kompkonv und biaffines, stetiges $\varphi : K \times L \longrightarrow M$ durch $\chi(f) := f \cdot \varphi$ ein Arch-Morphismus χ von $\mathcal{A}M$ in $\mathcal{A}K \otimes_\varepsilon \mathcal{A}L$ definiert ist, woraus sich unmit-

telbar die Eigenschaften eines projektiven Tensorproduktes für $(\omega_\tau, K\otimes_\tau L)$ ergeben. Das aber bedeutet $K\otimes_\tau L = K\otimes_\pi L$.

Mit ähnlichen Methoden kann man zeigen, daß unendlichdimensionale kompakte, konvexe Mengen K existieren (K kein Simplex), so daß $K\otimes_\tau L = K\otimes_\pi L$ für alle $L \in$ Kompkonv gilt. Ist z. B. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so hat die Menge

$$K := \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid |x_n| \leq |a_n| \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \}$$

im Raum aller beschränkten Folgen (Supremumsnorm) diese Eigenschaft.

Als erste Anwendung der oben bewiesenen Resultate wollen wir zeigen, daß die Tensorprodukte $\otimes_\varepsilon$ und $\otimes_p$ in V-Arch schon im endlichdimensionalen Fall verschieden sein können. Ein Gegenbeispiel für unendlichdimensionale Objekte wurde schon von GUICHARDET [16] angegeben.

Bezeichne Q das Quadrat mit den Ecken (0,0), (0,1), (1,1) und (1,0) im $\mathbb{R}^2$ und X bzw. Y die beim Beweis von xiv $\Longrightarrow$ i konstruierten Räume. Da Q kein Simplex ist, kann $\mathcal{L}Q$ nicht die Eigenschaft xiv haben. Folglich existiert ein Ordvekt-Morphismus $u: X \longrightarrow \mathcal{L}Q$, der nicht auf Y fortsetzbar ist. Da damit die durch $\Psi(f,x) := (u(x))(f)$ definierte Abbildung $\Psi : \mathcal{A}Q \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht auf $\mathcal{A}Q \times Y$ fortsetzbar ist, kann $\mathrm{id}_{\mathcal{A}Q}\otimes_p i$ keine nOE sein ($i: X \longrightarrow Y$ Einbettung). Da $\mathrm{id}_{\mathcal{A}Q}\otimes_\varepsilon i$ nOE ist (vgl. den Beweis von iii $\Longrightarrow$ iv), muß $\mathcal{A}Q\otimes_p X \neq \mathcal{A}Q\otimes_\varepsilon X$ oder $\mathcal{A}Q\otimes_p Y \neq \mathcal{A}Q\otimes_\varepsilon Y$ gelten.

ANHANG: DEFINITIONEN UND BEZEICHNUNGEN

Kategorien und Funktoren

Arch	11	V-Arch	12
Ordvekt	9		
Kompkonv	17	Präkompkonv	18
$\mathcal{K}$	12	$\mathcal{A}$	18
$\mathcal{A}_g$	19	$\mathcal{L}$	21

$\mathcal{C}K$: Raum der stetigen Funktionen auf K

Ausgezeichnete Abbildungen

OE	9	OQ	9
nOE	11	nOQ	12
AE, AQ, bAE, Schnitt			17
positive Abb.	9	affine Abb.	17

$\hookrightarrow$: Zeichen für eine Inklusionsabbildung

$\longmapsto$: Abbildungsdefinition durch elementweise Zuordnung

$f:K \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt (strikt) positiv, wenn $f(k) \geq 0$ (> 0) für jedes $k \in K$ gilt

c : Abbildung konstant gleich c ($c \in \mathbb{R}$)

biaffine Abbildung 23

bilineare Abbildung analog

(Eine bilineare Abbildung vom kartesischen Produkt zweier geordneter Vektorräume in die reellen Zahlen heißt positiv, wenn sie auf Paaren nichtnegativer Elemente nichtnegative Werte annimmt.)

Eine Abbildung heißt normalisiert, wenn sie die Einheit des Definitionsbereiches in die Einheit des Bildraumes überführt

Tensorprodukte

P_p, P_p^-, P_ε, $\otimes_p$, $\otimes_\varepsilon$, $\hat{\otimes}_p$, $\hat{\otimes}_\varepsilon$ 15

$f\otimes_p g$, $f\otimes_\varepsilon g$, $f\otimes_\varsigma g$, $\otimes_\varsigma$ 16

$\otimes_\pi$, $\otimes_\iota$, $\otimes_\tau$ 23

Konvexe Mengen und geordnete Vektorräume

Extremalpunkt	19	Seite	19
co, $\overline{\text{co}}$	19	Simplex	22

geordneter Vektorraum (A,A^+) 8

Rieszsche Trennungseigenschaft 10

simplizialer Raum 10

archimedischer Vektorraum 11

[a,b] : Ordnungsintervall von a bis b (einschließlich)

Logische Symbole und Bezeichnungen aus Mengenlehre und Topologie

$\bigwedge$: für alle $\bigvee$: es existiert ein

$\cap, \cup, \setminus$: Durchschnitt, Vereinigung, Differenz

$\times$: Kartesisches Produkt von Mengen bzw. Abbildungen

G°, G^- : Inneres bzw. abgeschlossene Hülle von G

S(x,r) : abgeschlossene Kugel um x mit dem Radius r

$\|f\|$: Norm eines Elementes f. Falls f eine Funktion ist, ist $\|f\|$ als $\sup_{x\in K}|f(x)|$ erklärt $(f:K\longrightarrow \mathbb{R})$

LITERATUR

[1] L. Alaoglu: Weak topologies of normed linear spaces
Ann. of Math. (2) 41, (1940), 252-267

[2] E. M. Alfsen: On compact sets and simplexes in infinite dimensional spaces
Matematisk Seminar, Universitet i Oslo, 1964 (mimeographed, 11 pp.)

[3] H. Bauer: Konvexität in topologischen Vektorräumen
Lecture notes der Universität Hamburg 1963/64

[4] H. Bauer: Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem
Ann. Inst. Fourier 11 (1961), 89-136

[5] H. Bauer: Kennzeichnung kompakter Simplexe mit abgeschlossener Extremalpunktmenge
Archiv der Mathematik 14 (1963), 415-421

[6] E. Behrends und G. Wittstock: Tensorprodukte kompakter konvexer Mengen
(erscheint)

[7] E. Behrends: Tensorprodukte konvexer Mengen
Diplomarbeit, Berlin 1969

[8] G. Birkhoff: Lattice Theory
New York 1948

[9] N. Bourbaki: Topologie générale, Chapitre II
Paris 1949

[10] N. Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques
Paris 1955

[11] G. Choquet und P. A. Meyer: Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques
Ann. Inst. Fourier 13 (1963), 139-154

[12] J. A. Clarkson: A characterization of C-spaces
Ann. of Math. (48), 845-850

[13] E. B. Davies und G. F. Vincent-Smith:
Tensor products, infinite products and projective limits of Choquet simplexes
Math. Scand. 22 (1968), 145-164

[14] D. A. Edwards: On the homeomorphic affine embedding of a locally compact cone into a Banach dual space endowed with the vague topology
Proc. of the London Math. Soc. (3) 14 (1964), 399-414

[15] D. A. Edwards: Séparation des fonctions réelles définies sur un simplex de Choquet
C. R. Acad. Sc. Paris 261 (1965), 2798-2800

[16] M. A. Guichardet: Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommutation
Ann. Ecole Norm. Sup. 83 (1966),1-52

[17] A. Hulanicki und R. R. Phelps: Some Applications of Tensor Products of Partially-Ordered Linear Spaces
Journal of Functional Analysis 2 (1968), 177-201

[18] M. Krein und D. Milman: On extreme points of regular convex sets
Stud. Math. 9 (1940), 133-138

[19] B. Mitchell: Theory of Categories
New York 1965

[20] I. Namioka und R. R. Phelps: Tensor products of compact convex sets
Pacific J. of Math. 31/2 (1969), 469-480

[21] P. Nicolae: Produits tensoriels ordonnés
Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Tome XIII, No. 2, 235-246, Bucarest 1968

[22] A. L. Peressini: Ordered Topological Vector Spaces
New York 1967

[23] R. R. Phelps: Lectures on Choquet's Theorem
New York 1966

[24] A. P. Robertson und W. J. Robertson: Topological Vector Spaces
Cambridge University Press 1964

[25] H. H. Schaefer: Topological Vector Spaces
New York 1966

[26] Z. Semadeni: Categorial Methods in Convexity
Proceedings of the Colloquium on Convexity
Kobenhavns 1967, 281-307

LEBENSLAUF

Ich, Ehrhard Behrends, wurde am 20. 2. 1946 als erster Sohn des Senatsangestellten Meinhard Behrends und seiner Frau Margarete, geb. Rocher, in Dahme (Mark Brandenburg) geboren. 1952 wurde ich in die 13. Grundschule in Berlin-Lichterfelde eingeschult. Nach dem Abschluß der 6. Klasse besuchte ich die Schmidt-Ott-Schule (Oberschule Realschule) in Berlin-Steglitz, bis ich 1962 in die Hermann-Ehlers-Schule (Oberschule Gymnasium) umgeschult wurde. An dieser Schule legte ich 1965 die Reifeprüfung ab.

Seit dem Sommersemester des gleichen Jahres studiere ich Mathematik (Nebenfach Physik) an der Freien Universität Berlin. Die Grundvorlesungen hörte ich bei Prof. Pachale und Prof. Grotemeyer. Nach dem Vordiplom besuchte ich weiterführende Vorlesungen von Prof. Pachale (Funktionalanalysis), Prof. Dinghas (Funktionentheorie), Prof. Orsinger (Zahlentheorie) und Privatdozent Dr. Wittstock (Funktionalanalysis). Mit Privatdozent Dr. Wittstock arbeitete ich auch noch nach seinem Weggang aus Berlin zusammen. Aus dieser Zusammenarbeit erhielt ich Anregungen zu meiner Diplomarbeit und zu der vorliegenden Dissertation.

Nach meiner Diplomprüfung im März 1969 wurde ich als Wissenschaftlicher Assistent am I. Mathematischen Institut angestellt.

Im August 1969 heiratete ich meine Ehefrau Christel, geb. Nöcker.

Druck: Dissertationsdruckstelle, 1 Berlin 33